Estratégia
Concursos

Aula 05

IBGE (Técnico em Informações Geográficas e Estatísticas) Matemática - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

26 de Maio de 2023

Índice

FRAÇÕES

Frações

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Múltiplos de um número

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B × k**, sendo **k** um número inteiro.

Exemplo: os números da forma **A** = **7×k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Números primos

Números primos são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo.

• Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**

Decomposição em fatores primos

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

• Decompor todos os números em fatores primos;

• Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

• Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que a **é múltiplo** de b, podemos eliminar b do cálculo do MMC.

• Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.

Introdução às frações

$a \longrightarrow$ Numerador

$b \longrightarrow$ Denominador

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.
Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".
Dada uma fração $\boldsymbol{a/b}$, a **fração complementar** corresponde a $\boldsymbol{1 - a/b}$.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

- Um número da forma $\mathbf{0,AAA\ldots = 0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABABAB\ldots = 0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{AB}}{99}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABCABCABC\ldots = 0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{ABC}}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Pessoal, antes de iniciarmos o conteúdo de frações propriamente dito, vamos fazer uma breve **revisão sobre múltiplos**, **números primos**, **decomposição em fatores primos** e **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**). É muito importante que você tenha conhecimento sobre esses assuntos, pois eles serão necessários para que façamos operações com frações.

Caso você já saiba calcular o MMC entre quaisquer números, **fique à vontade para pular esse tópico**.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$\mathbf{7} \times 0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{7} \times 1 = \mathbf{7}$$
$$\mathbf{7} \times 2 = \mathbf{14}$$
$$\mathbf{7} \times 3 = \mathbf{21}$$
$$\ldots$$

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$\mathbf{7} \ \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7 × k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B × k**, sendo **k** um número inteiro.

Tudo certo quanto ao conceito de múltiplos? Ok, agora vamos falar de números primos.

Números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

ATENÇÃO
DECORE!

Os 15 primeiros números primos são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.

- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.

- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.

- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.

- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.

- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.

- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \ \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MMC}\ (a; b; c)$.

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2^2 \times 5^1$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 2^1 \times 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = \quad\quad\quad 5^1$

$10 = 2^1 \times \quad 5^1$

$15 = \quad\quad 3^1 \times 5^1$

$20 = 2^2 \quad\quad \times 5^1$

$50 = 2^1 \quad\quad \times 5^2$

Logo, $\mathrm{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300.$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = \quad 3 \quad\quad \times 7$

$45 = \quad 3^2 \times 5$

$50 = 2 \quad\quad \times 5^2$

Logo, $\mathrm{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150.$

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.
- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$
$$= 2^2 \times 3 \times 5^2$$
$$= 300$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c} 21, & 45, & 50 & 2 \\ 21, & 45, & 25 & 3 \\ 7, & 15, & 25 & 3 \\ 7, & 5, & 25 & 5 \\ 7, & 1, & 5 & 5 \\ 7, & 1, & 1 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$
$$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$= 3150$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

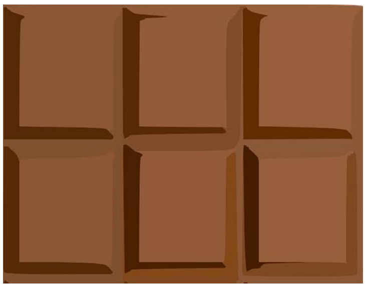
$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Feito! Agora que sabemos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre quaisquer números, vamos ao conteúdo sobre frações.

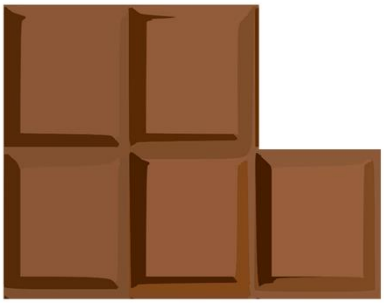
Introdução às frações

Conceitos preliminares

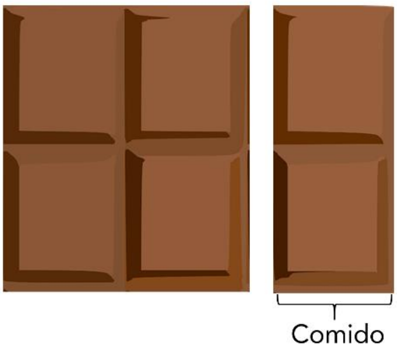
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer 5/6 (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, 5/6 representa a seguinte parte que foi comida:

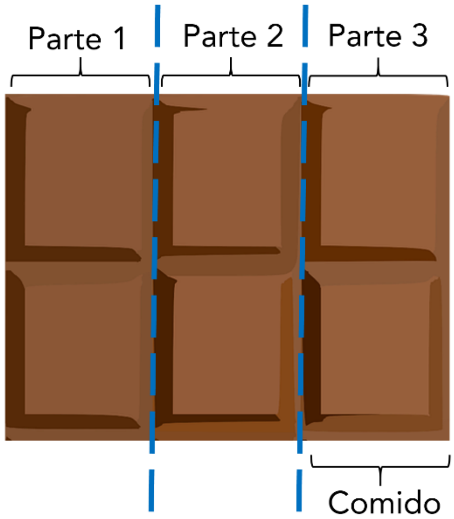


Comer 2/6 (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos 1/3 (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, 1/3 da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido 1/3 da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.



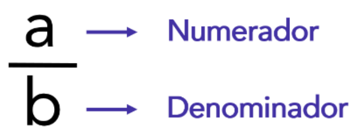
Note, portanto, que dizer que se comeu 2/6 da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu 1/3 da barra. Isso porque **as duas frações são equivalentes**:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.



Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

ACORDE!

> Uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.
>
> Dois números são **primos entre si** quando **não apresentam fatores primos em comum**.

Exemplos:

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{15}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **são primos entre si**). Veja que:
    - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como 2×7;
    - $\mathbf{15}$ pode ser decomposto como 3×5;
    - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum**, pois $\mathbf{14}$ apresenta os fatores primos 2 e 7, já $\mathbf{15}$ apresenta os fatores primos 3 e 5.

- $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{84}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ não são primos entre si). Veja que:
    - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2} \times \mathbf{7}$;
    - $\mathbf{84}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2}^2 \times 3 \times \mathbf{7}$;
    - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum: $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$.

- $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **são primos entre si**). Veja que:
    - $\mathbf{2}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 2;
    - $\mathbf{7}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 7;
    - $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

- $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam fatores primos em comum. ($\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ não são primos entre si). Veja que:
    - $\mathbf{3}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número $\mathbf{3}$;
    - $\mathbf{6}$ pode ser decomposto como $2 \times \mathbf{3}$;
    - $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam um fator primo em comum: $\mathbf{3}$.

Creio que, com esses exemplos, você já entendeu o que é uma fração irredutível e o que são números primos entre si.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro sucessivas vezes até que a divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84^{\div 2}}{120_{\div 2}} = \frac{42^{\div 2}}{60_{\div 2}} = \frac{21^{\div 3}}{30_{\div 3}} = \frac{7}{10}$$

Veja que, ao obter a fração $\frac{7}{10}$, **não é mais possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro**. Isso ocorre porque $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **são primos entre si**.

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}^{2}.\cancel{3}.7}{\underset{2^1}{\cancel{2}^{3}}.\cancel{3}.5} = \frac{7}{2.5} = \frac{7}{10}$$

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12}.7}{\cancel{12}.10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são ditas equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo anterior, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

a) 1/6

b) 1/3

c) 1/2

d) 1/4

e) 1/5

Comentários:

Podemos representar o denominador da fração como 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes** de modo que todas elas apresentem **o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) **de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (3;\ 5; 10)\ =\ 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\frac{2}{3}=\frac{(30\div 3)\times 2}{30}=\frac{10\times 2}{30}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{(30\div 5)\times 1}{30}=\frac{6\times 1}{30}=\frac{6}{30}$$

$$\frac{7}{10}=\frac{(30\div 10)\times 7}{30}=\frac{3\times 7}{30}=\frac{21}{30}$$

ESCLARECENDO!

Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:

$10 \times 2 = 20$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{?}{30}$ $\quad = 20$ $\quad 30 \div 3 = 10$

$6 \times 1 = 6$ $\quad \frac{1}{5} = \frac{?}{30}$ $\quad = 6$ $\quad 30 \div 5 = 6$

$3 \times 7 = 21$ $\quad \frac{7}{10} = \frac{?}{30}$ $\quad = 21$ $\quad 30 \div 10 = 3$

Voltando ao problema, temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$$

$$=\frac{20}{30}+\frac{6}{30}+\frac{21}{30}$$

$$=\frac{20+6+21}{30}$$

$$= \frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento. Suponha que devemos realizar a seguinte subtração:

$$\frac{44}{60} - \frac{20}{30}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (30;\ 60) =\ 60$. Ficamos com as seguintes frações equivalentes com denominador 60:

$$\frac{44}{60} - \frac{40}{60}$$

$$= \frac{44 - 40}{60}$$

$$= \frac{4}{60}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} = \frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a + b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 6, 8 e 10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = \mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10}$$

$$= \frac{(120 \div 6) \times 1}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20}{\mathbf{120}} + \frac{45}{\mathbf{120}} + \frac{84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{20 + 45 + 84}{\mathbf{120}}$$

$$= \frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Segundo o enunciado, temos que a soma das frações, dada por $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$, **é igual a** $\frac{a}{b}$, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **números naturais primos entre si**. Consequentemente:

- $\frac{a}{b}$ é uma **fração equivalente** a $\frac{149}{120}$, pois $\frac{149}{120} = \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**, pois a e b são números naturais primos entre si.

Devemos, portanto, obter a fração irredutível equivalente a $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$.

Veja que:

$$120 = 10 \times 12$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 4)$$

$$= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2)$$

$$= 2^3 \times 3 \times 5$$

Logo, **o número $\mathbf{120}$ apresenta os fatores primos $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ e $\mathbf{5}$**.

Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Assim, $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **são primos entre si**.

Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é a própria fração $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

a) 2.

b) 3.

c) 1.

d) 2,5.

e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A.

Note que os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2. Como **32 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 32**.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16}{\mathbf{32}} + \frac{8}{\mathbf{32}} + \frac{4}{\mathbf{32}} + \frac{2}{\mathbf{32}} + \frac{1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{31}{32}$$

Vamos agora realizar a soma para B.

Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3. Como **243 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 243**.

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$
$$= \frac{81}{\mathbf{243}} + \frac{27}{\mathbf{243}} + \frac{9}{\mathbf{243}} + \frac{3}{\mathbf{243}} + \frac{1}{\mathbf{243}}$$
$$= \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{\mathbf{243}}$$
$$= \frac{121}{243}$$

A soma entre A e B é:

$$A + B = \frac{31}{32} + \frac{121}{243}$$

Note que $\frac{31}{32}$ é aproximadamente $\frac{32}{32}$. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, $\frac{121}{243}$ é aproximadamente $\frac{121}{242}$. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0{,}5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$A + B \approx 1 + 0{,}5$$
$$= 1{,}5$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 20}{4 \times 9} = \frac{60}{36}$$

Veja que, no exemplo em questão, a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes mesmo de realizar a multiplicação.

No exemplo a seguir:

- Os números **20** e **4** são simplificados pelo número 4, obtendo-se, respectivamente, **5** e **1**;
- Os números **3** e **9** são simplificados pelo número 3, obtendo-se, respectivamente, **1** e **3**.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \div \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Veja este outro exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

Simplificando 3 e 9 por 3, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$$

Simplificando 2 e 20 por 2, temos:

$$\frac{1}{1} \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}$$

é igual a

a) 5/9.

b) 13/36.

c) 3.

d) 1.

e)7/18.

Comentários:

Temos a seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$$

Veja que:

- No primeiro produto, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$, podemos simplificar 2 e 4 pelo número 2, obtendo-se $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$;
- No segundo produto, $\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}$, podemos simplificar 5 e 10 pelo número 5, obtendo-se $\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}$; e
- No terceiro produto, $\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$, podemos simplificar 9 e 9 pelo número 9, obtendo-se $\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$.

Ficamos com:

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$$

O **MMC** entre os denominadores **4**, **6** e **12** é **12**. Logo:

$$\frac{2}{\mathbf{12}}+\frac{7}{\mathbf{12}}+\frac{3}{\mathbf{12}}$$
$$=\frac{2+7+3}{\mathbf{12}}$$
$$=\frac{12}{12}$$
$$=1$$

Gabarito: Letra D.

A questão a seguir é relativamente complicada. Logo, não se assuste caso não consiga resolver. Inseri essa questão aqui para, aos poucos, perdermos o medo de frações.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por ☐ da seguinte forma:

$$x\square y=\frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que 5☐1/2, em fração irredutível, é igual a 1/3. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que x ☐1/3 será igual a a)2/3.

b)1/2.

c)1/5.

d)1/4.

e)2/5.

Comentários:

Segundo o enunciado, a operação $x\square y$ é dada por:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}}$$

O denominador $\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}$ pode ser entendido como $\boldsymbol{\frac{x}{1} + \frac{x}{y}}$.

Realizando o **MMC** entre $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{y}$, obtém-se y. Ao realizar a soma das frações, ficamos com $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Logo:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{\frac{x.y + x}{y}}}$$

Veja que $x\square y$ é uma fração cujo numerador é x é o denominador é uma outra fração, dada por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Temos, portanto, a divisão de x por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Para realizar a divisão, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\square y = x \times \boldsymbol{\frac{y}{x.y + x}}$$

Note que, em $\boldsymbol{x.y + x}$, podemos colocar o x em evidência. Ficamos com $\boldsymbol{x \times (y + 1)}$. Logo:

$$x\square y = x \times \boldsymbol{\frac{y}{x \times (y + 1)}}$$

A partir do resultado obtido, podemos simplificar x. Ficamos com:

$$x\square y = \frac{y}{y + 1}$$

Logo, a operação $x\square y$ independe de x e equivale a $\frac{y}{y+1}$.

Para o caso em questão, $x\,\square 1/3$ é dado por:

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir se uma fração é maior ou menor do que outra, devemos escrevê-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes** **que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

a) a, b, c.

b) b, a, c.

c) c, a, b.

d) b, c, a.

e) c, b, a.

Comentários:

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) entre os denominadores das frações $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{c}$ é **20**. Isso porque os denominadores 5 e 10 são múltiplos do denominador 20.

As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a=\frac{2}{5}=\frac{8}{\mathbf{20}}\qquad b=\frac{3}{10}=\frac{6}{\mathbf{20}}\qquad c=\frac{7}{\mathbf{20}}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{\mathbf{20}}, \frac{7}{\mathbf{20}}, \frac{8}{\mathbf{20}}$. Logo, a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a=\frac{2}{5}=0{,}4\qquad b=\frac{3}{10}=0{,}3\qquad c=\frac{7}{20}=0{,}35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$.

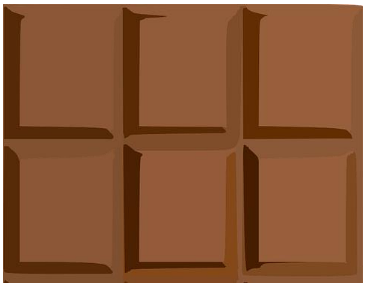
Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra "de"

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra "**de**". Isso porque essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para a essa barra de chocolate, 1/3 **de** 6 pedaços corresponde a:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 6\text{ pedaços}$$

$$=\frac{1}{3}\times 6\text{ pedaços}$$

$$=\frac{6}{3}\text{ pedaços}$$

$$= 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a 1/3 dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade (1/2). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu 1/2 **de** 1/3 **de** 6 pedaços:

$$\frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços}$$

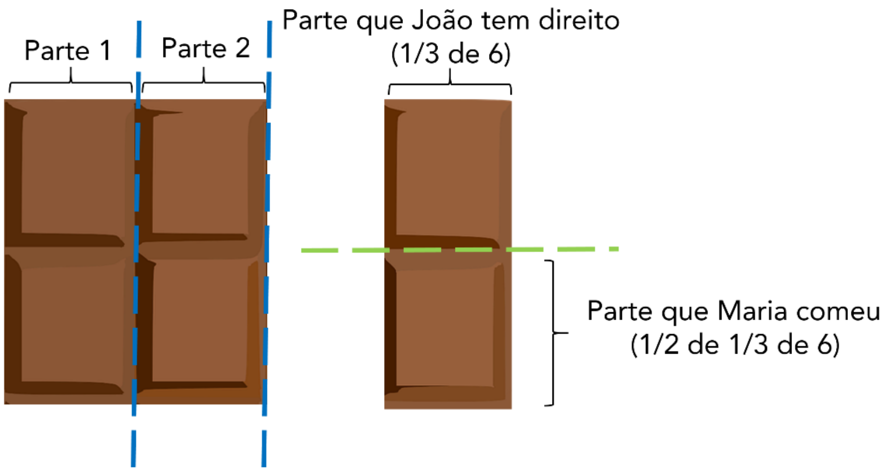
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3}$$

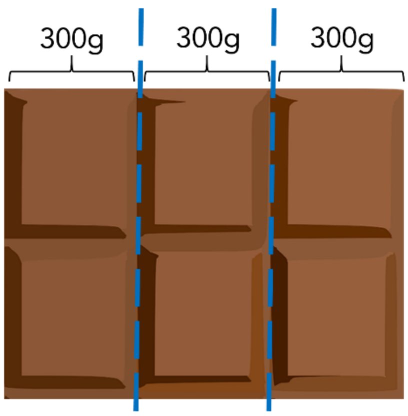
$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em 1/3 dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente 3 × 300g = 900g. Logo, 1/3 da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "**de**" pela **multiplicação**:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ 900\text{g}$$

$$= \frac{1}{3} \times 900\text{g}$$

$$= \frac{900\text{g}}{3}$$

$$= 300\text{g}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se 2/5 desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 60.

d) 72.

Comentários:

São mulheres 2/5 **de** 120 funcionários.

$$\frac{2}{5}\ \mathbf{de}\ 120$$

$$= \frac{2}{5} \times 120$$

$$= 2 \times \frac{120}{5}$$

$$= 2 \times 24$$

$$= 48$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

a) 1/4.

b) 1/3.

c) 3/8.

d) 1/6.

e) 3/16.

Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{8}\ \text{da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\ \text{da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ \text{da pizza}$$

$$=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\ \text{da pizza}$$

$$=\frac{2+1}{16}\ \text{da pizza}$$

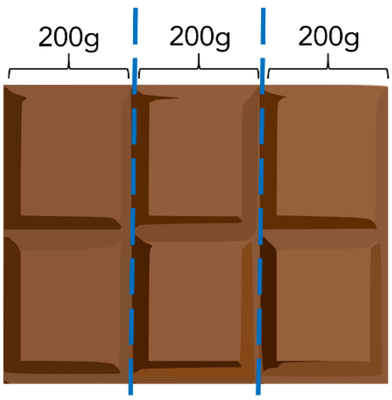
$$=\frac{3}{16}\ \text{da pizza}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

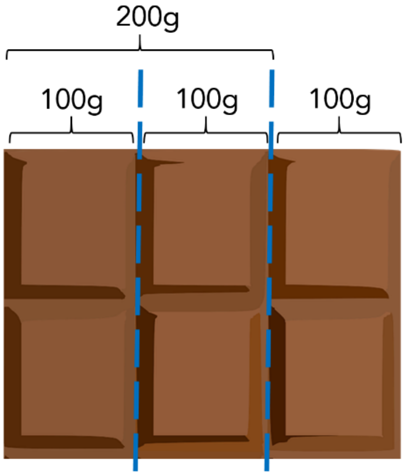
Se disséssemos que 1/3 de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

$$3\times 200\text{g} = 600\text{g}$$



E se disséssemos que 2/3 da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g**. **Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3\times 100\text{g} = \mathbf{300g}$$



Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Veja que, se 2/3 corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\frac{3}{2} \times 200\text{g}$$

$$= 3 \times \frac{\mathbf{200g}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{= 3 \times 100g}$$

$$= 300\text{g}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração 2/3 que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g),** para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g).**

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

a) 270 litros;

b) 240 litros;

c) 210 litros;

d) 180 litros;

e) 150 litros.

Comentários:

Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Se 2/3 correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\frac{3}{2} \times 120$$

$$= 3 \times \frac{120}{2}$$

$$= 3 \times 60$$

$$= 180 \text{ litros}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **3/2 da capacidade**.

$$\frac{3}{2} \textbf{ de } 180 \text{ litros}$$

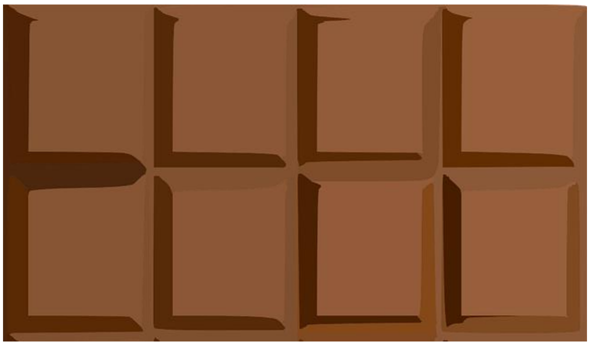
$$= \frac{3}{2} \times 180$$

$$= 270 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos 5/8 da barra, **qual fração da barra original ainda resta**?

Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de 5/8 da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por 8/8 (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

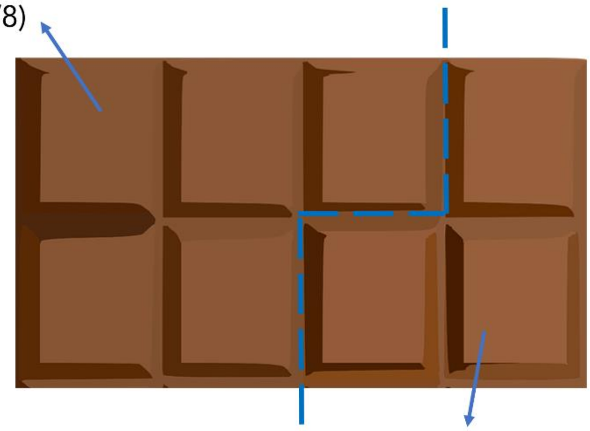
$$1 - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8}{8} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8-5}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer 5/8 é justamente 3 pedaços de 8 (3/8):



Podemos dizer, então, que dada uma fração $\frac{a}{b}$, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 1/4;

d) 3/4;

e) 1/12.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**.

O total da barra que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{4}$:

$$1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}} \textbf{ da barra}$$

Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ **do que tinha sobrado**, Marlene comeu:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \mathbf{\frac{3}{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$\frac{1}{3}\times\mathbf{\frac{3}{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$=\frac{1}{4}\ \text{da barra}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{da barra}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

a)1/8

b)1/6

c)1/5

d)1/4

e)1/3

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o **valor restante após a entrada** é a fração complementar a $\frac{1}{3}$:

$$1-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3-1}{3}$$
$$=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

Como Mauro **financiou $\frac{3}{4}$** **do valor restante após a entrada**, **ele financiou $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$**.

Isso significa que ele **não financiou $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$**, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Logo, a quantia **não financiada** do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$$

Simplificando 2 e 4 por 2, temos:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.

(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, 1/6, 5/24 e 1/5 desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

a) 144 kg

b) 180 kg

c) 210 kg

d) 306 kg

e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{20}{120}+\frac{25}{120}+\frac{24}{120}$$
$$=\frac{69}{120}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar** a $\frac{69}{120}$:

$$1-\frac{69}{120}$$
$$=\frac{120-69}{120}$$
$$=\frac{51}{120}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\frac{51}{120}\ \textbf{de}\ 720\text{ kg}$$
$$=\frac{51}{120}\times 720$$
$$=51\times\frac{720}{120}$$
$$=51\times 6$$
$$=306\text{ kg}$$

Gabarito: Letra D.

(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

a) $\frac{361}{460}$

b) $\frac{351}{460}$

c) $\frac{89}{450}$

d) $\frac{99}{450}$

e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido pelo ciclista é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 18**, **25** e **45**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$\begin{aligned}18 &= 2\times 9\\ &= 2\times 3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25 &= 5\times 5\\ &= 5^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}45 &= 9\times 5\\ &= 3^2\times 5\end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$18 = 2\times 3^2$

$25 = \quad 5^2$

$45 = \quad 3^2\times 5$

Logo, $\text{MMC}\ (18{,}25{,}45) = 2\times 3^2\times 5^2 = \mathbf{450}$

Portanto, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

$$= \frac{125}{\mathbf{450}} + \frac{126}{\mathbf{450}} + \frac{110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{125 + 126 + 110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{361}{450}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar** a $\frac{361}{450}$:

$$1 - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450}{450} - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450 - 361}{450}$$

$$= \frac{89}{450}$$

Gabarito: Letra C.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja $\boldsymbol{M}$.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M$$

$$= \frac{2}{5} \times M$$

$$= \frac{2}{5} M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5} M}$$

<u>**Desse total que restou**</u>, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de} \boldsymbol{\frac{3}{5} M}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} M$$

$$= \frac{1}{5} M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5} M - \frac{1}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5} M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$= \mathbf{24}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{3}\text{A}$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$\text{(Nacional-AM)} = \frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{4}\text{A}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$\text{(Total de alunos)} - \text{(Manaus FC)} - \text{(Nacional-AM)}$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$\text{(Manaus FC)} = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0{,}23232323\ldots = 0{,}\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5{,}77898989\ldots = 5{,}77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dizimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $\mathbf{0,AAA}\ldots = \mathbf{0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{A}{9}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABABAB}\ldots = \mathbf{0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABCABCABC}\ldots = \mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

$\mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$

Vamos a alguns exemplos.

Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0{,}3333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0{,}4545\ldots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0{,}672346723467234\ldots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0{,}55\overline{3} = 0{,}55 + \mathbf{0,00\overline{3}}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0{,}55 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \times \mathbf{0,\overline{3}}$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a 3/9.

$$= 0{,}55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{55}{100} + \frac{3}{900}$$

$$= \frac{9 \times 55 + 3}{900}$$

$$= \frac{498}{900}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$6{,}453\overline{12}\ldots = 6{,}453 + 0{,}000\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times 0,\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99}$$
$$= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000}$$
$$= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000}$$
$$= \frac{638859}{99000}$$

INDO MAIS FUNDO!

Uma decorrência interessante sobre a dízima periódica é que 0,999... é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0{,}999\ldots = 0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é 0,8666 ... , que o número decimal G é 0,7111 ... e que o número decimal H é 0,4222 ... , então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .

b) 5,888 . . .

c) 6

d) 3

e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0{,}8\bar{6} + 0{,}7\bar{1} + 0{,}4\bar{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$= \mathbf{(0,8 + 0,7 + 0,4)} + 0{,}0\bar{6} + 0{,}0\bar{1} + 0{,}0\bar{2}$$
$$= \mathbf{1,9} + \frac{1}{10}0,\bar{6} + \frac{1}{10}0,\bar{1} + \frac{1}{10}0,\bar{2}$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times (0,\bar{6} + 0,\bar{1} + 0,\bar{2})$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right)$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + 0{,}1$$
$$= 2$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se A = 1,232323... e B = 0,434343..., então A + B = 165/99.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$A = 1,\overline{23}$$
$$= 1 + \frac{23}{99}$$
$$= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99}$$

B apresenta o período 43.

$$B = 0,\overline{43}$$
$$= \frac{43}{99}$$

Ao somar A e B, temos:

$$A + B = \frac{122}{99} + \frac{43}{99}$$
$$= \frac{165}{99}$$

Gabarito: CERTO.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção

Razão

A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B.

- Razão entre A e B;
- Razão de A para B;
- A está para B;
- A:B;
- A/B;
- $\frac{A}{B}$.

Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as **razões A/B e C/D**. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

- A e D são os extremos; e
- B e C são os meios.

Multiplicação cruzada

Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Uma outra forma de entender a "**multiplicação cruzada**" é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**.

Não confundir a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema.

Propriedade fundamental da soma

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d}$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Uso conjunto das propriedade da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B;**
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30\ milhões$.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6\ milhões$.

A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24\,milhões$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B **em relação ao** número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre D e N_b:**

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24\,milhões}{6\,milhões} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de (2A—B)/2A vale:

a) 1

b) 1/2

c) 4/5

d) 3/5

e) 5/6

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **(2A—B)/2A**, temos:

$$\frac{2A - B}{2A}$$

$$= \frac{2 \times 3B - B}{2\ \times 3B}$$

$$\frac{6B - B}{6B}$$

$$\frac{5B}{6B} = \frac{5}{6}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **(2A—B)/2A**.

$$\frac{2\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

$$= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathbf{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando $2X$ pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5} \textbf{ de } X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4} \textbf{ de } X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais** **razões**.

Sejam as razões **A/B** e **C/D**. A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- **A** está para **B** assim como **C** está para **D**;
- **A:B::C:D**;
- **A/B = C/D**;
- $\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{C}{D}}$.

Ainda em uma proporção **A/B = C/D**, diz-se que:

- **A** e **D** são os extremos; e
- **B** e **C** são os meios.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por "multiplicação cruzada" nos diz o seguinte:

Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.
Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10} = \frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20, é igual ao produto dos extremos, 5×40, pois ambas multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.

Determine o valor de incógnita "x" na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

Realizando a "multiplicação cruzada", obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6{,}5$$

Uma outra forma de entender a "multiplicação cruzada" é perceber que podemos rearranjar os meios e os extremos. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são 4 e $9\,(x+1)$.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{4 \times 9(x+1)}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{4 \times 9\,(x+1)} = \frac{1}{20}$$

Uma outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{9\,(x+1)} = \frac{4}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.

Os extremos da proporção considerada são $3(x-2)$ e 20.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{3(x-2)\times 20}{4} = \frac{9\,(x+1)}{1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{9\,(x+1)}{3(x-2)\times 20}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{9\,(x+1)}{3(x-2)}$$

Entendida essa nova percepção da "multiplicação cruzada", vamos determinar o valor da incógnita "x" de uma outra maneira.

Determine o valor de incógnita "x" na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\,(x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$$

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{20}$$

$$\frac{(x-2)}{1} = \frac{4\times 9\,(x+1)}{3\times 20}$$

$$(x-2) = \frac{4\times 9}{3\times 20}\times (x+1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x-2) = \frac{3}{5}\times (x+1)$$

$$x-2 = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6,5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre "multiplicação cruzada".

(Pref. P das Missões/2019) O valor de “x” na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

a) 2.

b) 5.

c) 7.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.

(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

a) 0,8

b) 1,8

c) 2,4

d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0{,}6}{1{,}6} = \frac{0{,}3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0{,}6 \times k = 1{,}6 \times 0{,}3$$

$$0{,}6k = 0{,}48$$

$$k = \frac{0{,}48}{0{,}6}$$

$$k = 0{,}8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para 2/3 da quantidade do produto B é igual a 1/3. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

a) 1/6 da quantidade do produto B.

b) 2/9 da quantidade do produto B.

c) 1/3 da quantidade do produto B.

d) 2/5 da quantidade do produto B.

e) 1/2 da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3}Q_b$ é igual a 1/3. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)}{3}$$

$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A 2/9 da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Peruíbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de 1/3. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1\mathrm{S} = 3\mathrm{C}$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$\mathrm{T} = \mathrm{C} + \mathrm{S}$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \frac{C}{C + S}$$

Como **S = 3C**, temos:

$$= \frac{C}{C + 3C}$$

$$= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4}$$

Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas também as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, por exemplo, casos como os seguintes:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{\mathbf{a+c}}{\mathbf{b+d}}$$
$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{e}{f} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}}, \text{então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{\mathbf{a+c+g}}{\mathbf{b+d+h}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20}$. Determine a, b e c, sabendo que $a + b + c = 140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = \frac{a+b+c}{5+10+20}$$
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = \frac{140}{35}$$
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} = 4$$

A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5} = 4 \ \rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \ \rightarrow b = 40$$
$$\frac{c}{20} = 4 \ \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{d}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\boldsymbol{(x+1)-(x-4)}}{\boldsymbol{10-5}}$$
$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$
$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \mathbf{1}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x + 1 = 10$$
$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x - 4 = 5$$
$$x = 9$$

Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a + c + e + g}{-b + d + f + h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a - c + e - g}{b - d + f - h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e - g}{b + d - f - h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e + g}{b + d - f + h}}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a <u>mesma operação</u> (soma ou subtração) <u>com o denominador dessa razão</u>.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}} = \frac{g}{h} = \boldsymbol{\frac{a + c - e}{b + d - f}}$$

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{\frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c + e - g}{-d + f - h}}$$

Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20\ \text{cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20\ \text{cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480\ \text{cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times \mathbf{10^{-2}}\ \text{m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4{,}8\ \text{m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.

(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

a) 25 m e 15 cm.

b) 60 m e 80 cm.

c) 500 m e 12 cm.

d) 500 m e 15 cm.

e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{2.500} = \frac{20\text{cm}}{\text{X}}$$

$$1 \times \text{X} = 20\text{cm} \ \times 2.500$$

$$\text{X} = 50.000 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor de X, em metros, é:

$$\text{X} = 50.000 \times \mathbf{10^{-2}}\text{m}$$

$$\text{X} = 500\text{m}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{4.000} = \frac{\text{Y}}{600\text{m}}$$

$$\frac{600\text{m}}{4.000} = \text{Y}$$

$$\text{Y} = 0{,}15 \text{ m}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, $\text{Y} = 15\text{cm}$.

Gabarito: Letra D.

PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

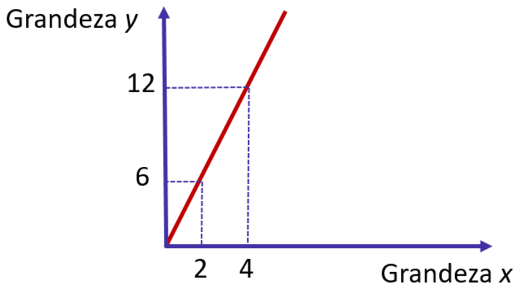
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B})\times(\text{Grandeza C})\times(\text{Grandeza D})} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{\text{x}_1}{\text{y}_1} = \frac{\text{x}_2}{\text{y}_2} = \frac{\text{x}_3}{\text{y}_3} = \cdots = \frac{\text{x}_\text{n}}{\text{y}_\text{n}} = \text{k}$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza C})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A}) \times (\text{gradeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times (\text{grabdeza D}) = \text{k}$$

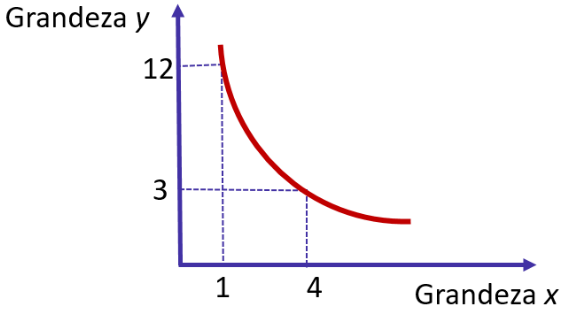
Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{Grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\textbf{Grandeza B}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{(\textbf{Grandeza B})\times(\textbf{Grandeza C})\times(\textbf{Grandeza D})} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais,** entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = \text{k}$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = \text{k}$$

Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10} = k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5\times8} = \frac{x}{7\times10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{70}$$

$$2 \times 70 = 1 \times x$$

$$x = 140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica (6,X,Y,12) é diretamente proporcional a sequência (3,4,5,6). Qual o valor de X+Y?

a) 8

b) 18

c) 16

d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, X, Y, 12)$ é proporcional à sequência $(3,4,5,6)$, temos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = k$$

Qual é a constante de proporcionalidade **k**? $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2.$

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

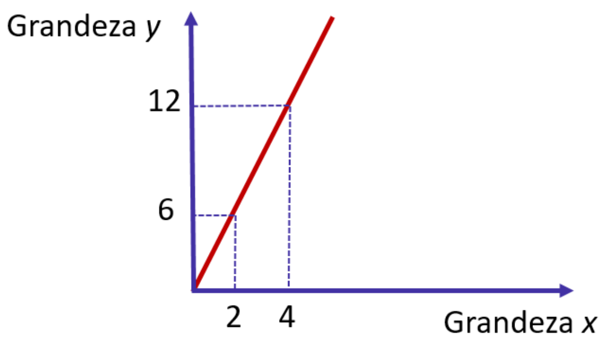
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, temos:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

$$\mathbf{y = kx}$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.

(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x, diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k.

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+7+10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.

$$\frac{a}{5} = 100 \ \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \ \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \ \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R$ 13,00, outro com R$ 14,00 e o terceiro com R$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

a) R$ 1.950,00.

b) R$ 2.000,00.

c) R$ 2.050,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R$13 , R$14 e R$22 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$\ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\boxed{\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.

Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R$ 225,00 e R$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

a) 15

b) 21

c) 19

d) 20

e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R$225 e R$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{ R\$285}$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2, receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R$225 e R$240. Se a idade do filho mais velho é V, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\frac{\mathbf{225}}{\boldsymbol{N_1}} = \frac{\mathbf{240}}{\boldsymbol{N_2}} = \frac{285}{V} = \frac{\mathbf{225+240}}{\boldsymbol{N_1+N_2}}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{\mathbf{31}}$$

$$\boxed{\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.

Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

a) 15.500,00.

b) 139.500,00.

c) 46.500,00.

d) 62.000,00.

e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1 , 3, 4 e 9 forem respectivamente a, b, c e d, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c + d = R\$\ 263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{a+b+c+d}{1+3+4+9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{263.500}{17}$$

$$\boxed{\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = 15.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3} = 15.500$$

$$b = 46.500$$

Gabarito: Letra C.

Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a** $\frac{1}{B}$.

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = (\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza C}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza D}}\right)} = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D}) = \textbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional** **ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\frac{1}{(\text{peças tipo A})}\times\frac{1}{(\text{peças tipo B})}} = \text{k}$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50}\times\frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25}\times\frac{1}{250}} = k$$

Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{50}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}} = k$$

$$\mathbf{50 \times 50 \times 100 = \boldsymbol{C} \times 25 \times 250}$$

$$\frac{50 \times 50 \times 100}{25 \times 250} = C$$

$$C = R\$\ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é <u>diretamente proporcional</u> à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é <u>inversamente proporcional</u> à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $\boldsymbol{M = 4}$ e $\boldsymbol{N = 18}$, tem-se $\boldsymbol{L = 60}$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 15}$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 72}$$

Devemos determinar o valor de $M+N$ para o caso em que $L=45$.

$$\frac{L}{M}=k_1 \rightarrow \frac{45}{M}=15 \rightarrow M=\frac{45}{15} \rightarrow M=3$$

$$MN=k_2 \rightarrow 3 \times N=72 \rightarrow N=24$$

Logo, **para $L=45$**, temos:

$$M+N=3+24$$

$$=27$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}}=\frac{x_2}{\frac{1}{y_2}}=\frac{x_3}{\frac{1}{y_3}}=\cdots=\frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}=k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1=x_2 \times y_2=x_3 \times y_3=\cdots=k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	–4	–3	–2	–1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma consante, isto é:

$$x_1 \times y_1=x_2 \times y_2=x_3 \times y_3=\cdots=k$$

Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito**.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

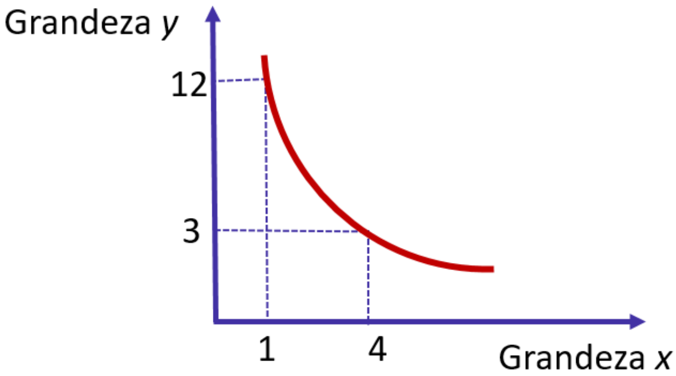
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.

$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(1; 12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y, os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

a) Júlia e Luana.

b) Júlia e André.

c) Caio e Luana.

d) Caio e André.

e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y, tais que $y = \frac{1}{x} + 1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, **x dobrou e y não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4+2+1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$\boxed{5a = 10b = 20c = 2.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \ \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R$10 , R$20 e R$50 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10a = 20b = 50c = 1.600}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \ \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \ \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \ \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R$10, 80 cédulas de R$20 e 32 cédulas de R$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$\,50$$

$$= R\$\,4.800$$

Gabarito: Letra E.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais.**

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, 1/D e 1/E**. Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{grandeza E})}} = \mathbf{k}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \frac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R$ 5,00 foi x, então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \frac{1}{2{,}5}} = \frac{x}{500.000 \times \frac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \ \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \ \times 5}{500.000} = k$$

Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \times 2{,}5}{2} = \frac{x \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$2 \times (x \times 5) = 10.000 \times 2{,}5 \times 1$$

$$10x = 25.000$$

$$x = 2.500$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais à nota obtida em matemática** e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{\mathbf{10} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}} = \frac{B}{\mathbf{8} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{C}{\mathbf{5} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}} = k$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Temos que a soma das quantias recebidas é R$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\boxed{\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \ \rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \ \rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \ \rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R$ 1.500, R$ 6.000 e R$ 7.500.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Frações

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022)

$$a = \frac{5}{6}, b = \frac{7}{9}, c = \frac{13}{18}$$

Colocando essas frações em ordem crescente a sequência correta é

a) $a < b < c$.

b) $b < a < c$.

c) $b < c < a$.

d) $c < a < b$.

e) $c < b < a$.

Comentários:

Para comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador comum será o **MMC** entre **6**, **9** e **18**.

Como **18** é múltiplo de **6** e de **9**, **o MMC entre os números é o próprio 18**.

As frações equivalentes a $a = \frac{5}{6}, b = \frac{7}{9}, c = \frac{13}{18}$ com o denominador **18** são:

$$a = \frac{5}{6} = \frac{(18 \div 6) \times 5}{18} = \frac{15}{18}$$

$$b = \frac{7}{9} = \frac{(18 \div 9) \times 7}{18} = \frac{14}{18}$$

$$c = \frac{13}{18}$$

A ordem crescente entre as frações com o denominador 18 é $\frac{13}{18} < \frac{14}{18} < \frac{15}{18}$. Logo, a ordem crescente das frações do problema é $c < b < a$.

Gabarito: Letra E.

2.(FGV/PM SP/2022) Considere os produtos:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2022}\right)$$

$$D=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

O produto SD é igual a

a) 2023/2022.

b) 2023/4044.

c) 2022/2023.

d) 4044/2023.

e) 1.

Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o valor de S:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2022}\right)$$

$$S=\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right)\left(\frac{5+1}{5}\right)\dots\left(\frac{2022+1}{2022}\right)$$

$$S=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\dots\left(\frac{2023}{2022}\right)$$

Simplificado o numerador de uma fração com o denominador da fração seguinte, ficam restando apenas o **denominador da primeira fração** e o **numerador da última fração**. Logo:

$$S=\frac{2023}{2}$$

Vamos agora calcular o valor de D:

$$D=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

$$D=\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{4-1}{4}\right)\left(\frac{5-1}{5}\right)\dots\left(\frac{2022-1}{2022}\right)$$

$$D=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\dots\left(\frac{2021}{2022}\right)$$

Simplificado o denominador de uma fração com o numerador da fração seguinte, ficam restando apenas o **numerador da primeira fração** e o **denominador da última fração**. Logo:

$$D = \mathbf{\frac{1}{2022}}$$

Logo, o produto SD é igual a:

$$SD = \mathbf{\frac{2023}{2}} \times \mathbf{\frac{1}{2022}}$$

$$SD = \frac{2023}{4044}$$

Gabarito: Letra B.

3.(FGV/CBM-RJ/2022) João recebeu certa quantia. Com a terça parte da quantia, pagou os gastos com o cartão de crédito, e pagou o aluguel com a quinta parte do restante.

Da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é

a) 2/5

b) 3/5

c) 7/15

d) 8/15

e) 17/30

Comentários:

Considere que João recebeu originalmente uma quantia X.

Com a terça parte da quantia $\left(\frac{1}{3}X\right)$, João pagou gastos com o cartão de crédito. O valor restante após esse pagamento é:

$$X - \frac{1}{3}X = \frac{3X - X}{3} = \frac{2}{3}X$$

Com a quinta parte do restante, isto é, com $\mathbf{\frac{1}{5}}$ **de** $\boldsymbol{\frac{2}{3}X}$, João pagou o aluguel.

A fração complementar de $\frac{1}{5}$ é:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

Portanto, após esse novo pagamento, restou $\mathbf{\frac{4}{5}}$ **de** $\boldsymbol{\frac{2}{3}X}$:

$$\frac{4}{5}\ \mathrm{de}\ \frac{2}{3}X$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} X$$

$$= \frac{8}{15} X$$

Veja que, após os pagamentos, **restou** $\frac{8}{15}$ de X, isto é, $\boldsymbol{\frac{8}{15}}$ **da quantia original**. Logo, da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é $\boldsymbol{\frac{8}{15}}$.

Gabarito: Letra D.

4.(FGV/CM Taubaté/2022) Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação. Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é:

a) 5/7.

b) 5/12.

c) 1/2.

d) 2/7.

e) 2/5.

Comentários:

Considere que o salário de Marlene seja S.

"Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel..."

Portanto, o total gasto com aluguel é:

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4} \text{de S}$$

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4} \times \text{S}$$

$$\text{Aluguel} = \frac{1}{4} \text{S}$$

"...e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação."

O valor restante após o gasto com aluguel é:

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após} \\ \text{Aluguel}}} = \text{Salário} - \text{Aluguel}$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = S - \frac{1}{4}S$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = \frac{4S - S}{4}$$

$$\text{Restante}_{\substack{\text{Após}\\\text{Aluguel}}} = \frac{3}{4}S$$

Desse valor restante, é 1/3 é gasto com alimentação. Logo, o valor gasto com alimentação é:

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{3}\ \text{de}\ \frac{3}{4}S$$

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}S$$

$$\text{Alimentação} = \frac{1}{4}S$$

"Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é..."

O valor que sobra após pagar o aluguel e a alimentação é:

$$\text{Salário} - \text{Aluguel} - \text{Alimentação}$$

$$S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{4S - 1S - 1S}{4}$$

$$= \frac{2S}{4}$$

$$= \frac{1}{2}S$$

Logo, a fração do salário que sobra para as outras despesas é 1/2.

Gabarito: Letra C.

5.(FGV/PM SP/2022) Em uma caixa há várias bolas, cada uma de uma cor. As cores das bolas são: vermelho, azul, verde e rosa. Há, pelo menos, uma bola de cada cor.

Um terço das bolas são vermelhas, um quinto são azuis e 10 bolas são verdes.

O número mínimo de bolas rosas na caixa é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários:

Considere que o total de bolas seja T. Temos as seguintes informações do enunciado:

- **Um terço das bolas são vermelhas**. Logo, o número de bolas vermelhas é $\boldsymbol{\frac{1}{3}T}$**;**
- **Um terço das bolas são azuis**. Logo, o número de bolas azuis é $\boldsymbol{\frac{1}{5}T}$;
- **10 bolas são verdes**.

Considere também que o número de bolas rosas seja R. Devemos encontrar o valor mínimo para R.

Note que a soma de todas as bolas é igual a T. Logo:

$$\frac{1}{3}T + \frac{1}{5}T + 10 + R = T$$

$$R = T - \frac{1}{3}T - \frac{1}{5}T - 10$$

$$R = \frac{15T - 5T - 3T}{15} - 10$$

$$R = \frac{7}{15}T - 10$$

$$\boldsymbol{R = 7 \times \frac{T}{15} - 10}$$

Sabemos que o número de bolas rosas deve ser um **valor <u>inteiro</u> <u>positivo</u> e <u>diferente de zero</u>** (pois há pelo menos uma bola rosa)**.** Como queremos o valor mínimo para o número de rosas, devemos minimizar $\frac{T}{15}$ respeitando essas restrições.

Veja que, se $\frac{T}{15}$ for igual a 1, isto é, se $T = 15$, teremos um número negativo de bolas rosas.

$$R = 7 \times 1 - 10$$

$$R = -3$$

Por outro lado, se $\frac{T}{15}$ for igual a 2, isto é, se $T = 30$, teremos:

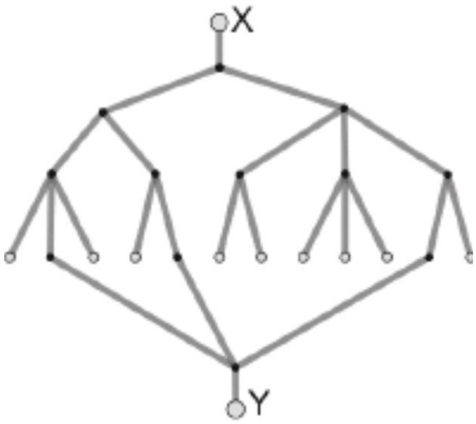
$$R = 7 \times 2 - 10$$

$$R = 4$$

Portanto, **o número mínimo de bolas rosas na caixa é 4**.

Gabarito: Letra D.

6.(FGV/SEFAZ ES/2022) A figura a seguir mostra uma rede de canos de água em um plano vertical. Qualquer quantidade de água colocada na abertura X desce e divide-se em partes iguais em cada um dos pontos de divisão. Os pontos brancos no final de cada percurso são saídas.



A fração da quantidade de água que, colocada em X, sai por Y é

a) 1/3.

b) 3/8.

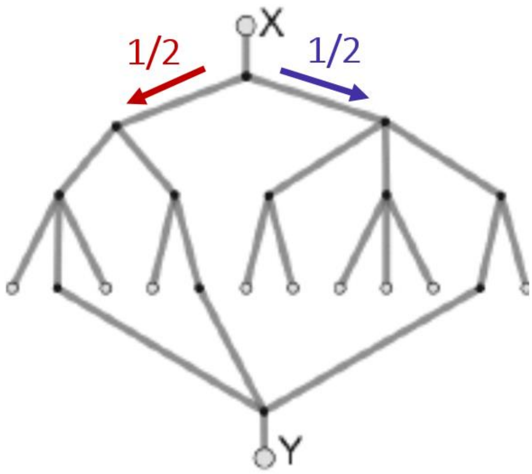
c) 5/12.

d) 5/24.

e) 7/24.

Comentários:

Em cada um dos pontos de divisão, **a água é dividida em partes iguais**. Inicialmente, a água é dividida em duas: **metade da água vai para a esquerda** e a **outra metade vai para a direita**.



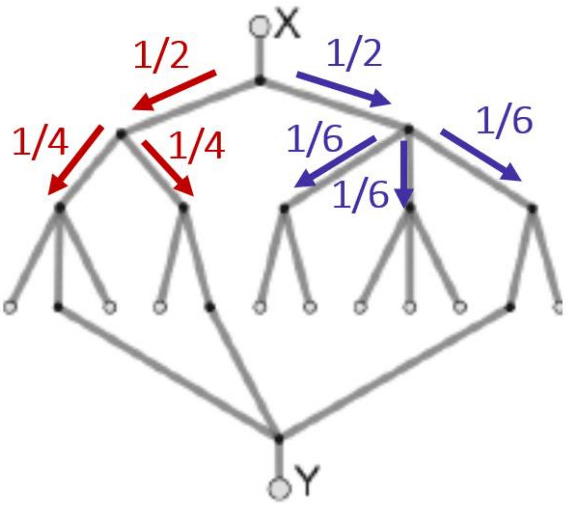
Na sequência, a **água que corre pela esquerda** é dividida em **duas partes**. Temos, portanto, **metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da quantidade de água original em cada novo ramo**. Isto é, temos:

$$\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Além disso, a **água que corre pela direita** é dividida em **três partes**. Temos, portanto, **um terço** $\left(\frac{1}{3}\right)$ **da metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **da quantidade de água original em cada novo ramo**. Isto é, temos:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ficamos com a seguinte representação:



A partir de agora, vamos analisar a quantidade de água que sai por Y por meio do **fluxo da esquerda**, para depois analisar a quantidade de água que sai por Y por meio do **fluxo da direita.**

Fluxo da esquerda

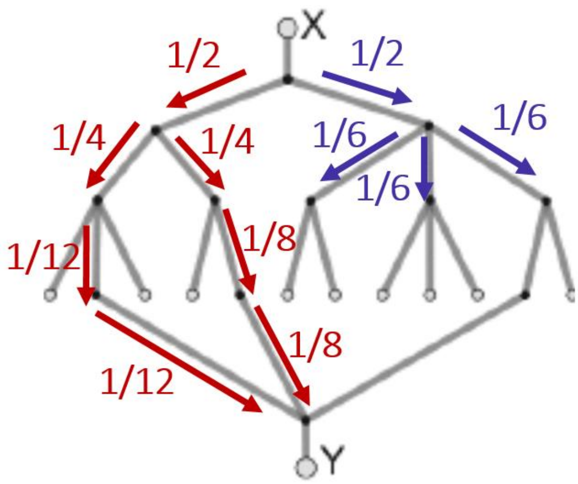
Na esquerda, temos dois fluxos de água que correspondem a $\frac{1}{4}$ do original.

Do primeiro fluxo, apenas $\frac{1}{3}$ é a aproveitado em Y:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Do segundo fluxo, apenas $\frac{1}{2}$ é aproveitado em Y:

$$\frac{1}{2}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$



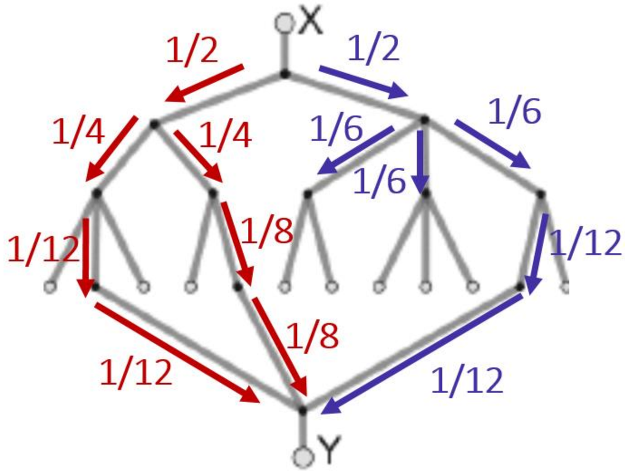
Fluxo da direita

Na direita, temos três fluxos que correspondem a $\frac{1}{6}$ do original.

Do primeiro e do segundo fluxo, nada é aproveitado em Y.

Do terceiro fluxo, apenas $\frac{1}{2}$ é aproveitado em Y:

$$\frac{1}{2}\ \mathbf{de}\ \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$



<u>Total de água que sai por Y</u>

A partir da figura anterior, temos que o total de água que sai por Y é:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

$$= 2 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{4+3}{24}$$

$$= \frac{7}{24}$$

Gabarito: Letra E.

7. (FGV/PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M = \frac{2}{5} \times M = \frac{2}{5}M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}M}$$

Desse total que restou, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de} \boldsymbol{\frac{3}{5}M} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}M = \frac{1}{5}M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5}M - \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5}M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

Cebraspe

8.(CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Entre os três servidores, Maria é a mais eficiente, isto é, em cada dia de trabalho, ela cataloga mais livros que cada um dos outros dois.

Comentários:

Para determinar o servidor que cataloga mais livros, devemos determinar qual fração dentre $\mathbf{\frac{1}{4}}$, $\mathbf{\frac{1}{3}}$ e $\mathbf{\frac{5}{12}}$ é a maior.

Ao comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador será o MMC entre 4, 3 e 12, que é 12. Temos que:

$$\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{12}} \text{ e } \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{12}}$$

Portanto, as frações com denominador 12 correspondentes à quantidade de livros catalogados por **Paulo**, **Maria** e **João** são, respectivamente:

$$\mathbf{\frac{3}{12}};\ \mathbf{\frac{4}{12}};\ \mathbf{\frac{5}{12}}$$

Logo, **João** cataloga mais livros do que cada um dos outros dois.

Gabarito: ERRADO.

9.(CESPE/TCE-RS/2013) Na secretaria de um órgão público, as páginas dos processos, para serem digitalizadas, são separadas e distribuídas entre 7 servidores — 4 servidores recém-contratados e 3 servidores antigos. Julgue o item a seguir, a respeito dessa situação.

Considere que, com a aquisição de novos equipamentos, o tempo para se digitalizar uma página, que era de 22 segundos, passou a ser de [22 – 22 × P] segundos, em que P correspondente à dízima periódica 0,27272727.... Nessa situação, com os novos equipamentos, a digitalização de uma página passou a ser feita em 16 segundos.

Comentários:

P é uma dízima periódica que pode ser escrita na forma fracionária:

$$P = 0,\overline{27} = \frac{27}{99}$$

O tempo de digitalização da página passou a ser:

$$22 - 22 \times P$$

$$= 22 - 22 \times \frac{27}{99}$$

$$= 22\left(1 - \frac{27}{99}\right)$$

$$= 22\left(\frac{99 - 27}{99}\right)$$

$$= 22 \times \frac{72}{99}$$

Simplificando 22 e 99 por 11, obtemos:

$$= 2 \times \frac{72}{9}$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

Gabarito: CERTO.

10.(CESPE/TJ PA/2020) Dois colaboradores do setor de informática de uma empresa são responsáveis por fazer a manutenção dos computadores da empresa. Durante certo período de tempo, um dos colaboradores fez manutenção em $0,\overline{26} = 0,262626$ da quantidade total de computadores da empresa e, nesse mesmo período de tempo, o outro colaborador fez manutenção em $0,\overline{18} = 0,181818$ dessa quantidade total de computadores, tendo restado 110 computadores sem manutenção.

Nessa situação, a quantidade total de computadores dessa empresa é igual a

a) 130.

b) 139.

c) 155.

d) 159.

e) 198.

Comentários:

Seja T o total de computadores da empresa. O número de **computadores com manutenção** é:

$$0,\overline{26}\ \textbf{do}\ \text{total} + 0,\overline{18}\ \textbf{do}\ \text{total}$$

$$= 0,\overline{26}\ \times \text{T} + 0,\overline{18}\ \times \text{T}$$

$$= \frac{26}{99}\text{T} + \frac{18}{99}\text{T}$$

$$= \frac{26+18}{99}\text{T}$$

$$= \frac{44}{99}\text{T}$$

$$= \frac{4}{9}\text{T}$$

O total de **computadores sem manutenção** é tal que:

$$(\textbf{Total}\ \text{de computadores}) - (\text{Computadores}\ \textbf{com}\ \text{manutenção}) = (\text{Computadores}\ \textbf{sem}\ \text{manutenção})$$

$$\text{T} - \frac{4}{9}\text{T} = 110$$

$$\frac{9-4}{9}\text{T} = 110$$

$$\frac{5}{9}\text{T} = 110$$

$$T = \frac{110 \times 9}{5}$$

$$T = 198$$

Temos, portanto 198 computadores na empresa.

Gabarito: Letra E.

11.(CESPE/Pref. B dos Coqueiros/2020) Em seu testamento, um pai deixou o diagrama mostrado a seguir, para ilustrar como deverá ocorrer a distribuição de sua herança, no valor de 2,7 milhões de reais, entre seus cinco herdeiros.

Com base nas informações precedentes, e considerando-se que, em cada linha desse diagrama, o retângulo branco mostrado está dividido em partes iguais, é correto concluir que

a) o quarto filho receberá mais de 420 mil reais.

b) a mãe e o terceiro filho receberão, juntos, um total de 1,3 milhão de reais.

c) a mãe e o primeiro filho receberão, juntos, menos de 1,4 milhão de reais.

d) os quatro filhos receberão, juntos, 2 milhões de reais.

e) a mãe e o quarto filho receberão, juntos, exatamente o mesmo total recebido pelos outros três filhos.

Comentários:

Pelo diagrama, podemos perceber que:

- A mãe receberá $\frac{1}{3}$ do total da herança;
- O 1º filho receberá $\frac{1}{3}$ do valor restante após a distribuição da parte que cabe à mãe; e
- Os demais filhos (3º, 4º e 5º) receberão cada um $\frac{1}{3}$ do que restou após a distribuição da herança para mãe e para o 1º filho.

O valor recebido pela **mãe** é:

$$\frac{1}{3} \times 2.700.000 = \text{ R\$ } 900.000$$

Após a distribuição da parte que cabe à **mãe**, restam $2.700.000 - 900.000 = \text{R\$ } 1.800.000$.

O valor recebido pelo **1º filho** é:

$$\frac{1}{3} \times 1.800.000 = \text{R\$ } 600.000$$

Após a distribuição da herança para **mãe** e para o **1º filho**, restam $1.800.000 - 600.000 = \text{R\$ } 1.200.000$.

O valor recebido individualmente pelo 2º, pelo 3º e pelo 4º filho é:

$$\frac{1}{3} \times 1.200.000 = \text{R\$ } 400.000$$

Note que **a mãe e o terceiro filho** receberão, juntos, um total de:

$$900.000 + 400.000 = \text{R\$ } 1.300.000$$

Gabarito: Letra B.

12.(CESPE/TC-DF/2014) Em uma empresa, as férias de cada um dos 50 empregados podem ser marcadas na forma de trinta dias ininterruptos, ou os trinta dias podem ser fracionados em dois períodos de quinze dias ininterruptos ou, ainda, em três períodos de dez dias ininterruptos. Em 2013, depois de marcadas as férias de todos os 50 empregados, constatou-se que 23, 20 e 28 deles marcaram os trinta dias de férias ou parte deles para os meses de janeiro, fevereiro e junho, respectivamente. Constatou-se, também, que, nesse ano, nenhum empregado marcou férias para algum mês diferente dos mencionados.

Tendo como referência as informações acima, julgue o item que se segue.

Suponha que, em 2013, mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino e mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino. Nessa situação, é correto afirmar que, em 2013, havia na empresa no máximo 12 mulheres a mais que homens.

Comentários:

Para resolver a questão, vamos transformar as frações em números absolutos.

"*...mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino...*"

Como 20 empregados marcaram férias para fevereiro e há um total de 50 empregados, temos 50−20 = 30 empregados que não marcaram férias para fevereiro. Desses 30, **mais de 5/6 são mulheres**.

$$\frac{5}{6} \textbf{ de } 30 = \frac{5}{6} \times 30 = 25$$

Logo, temos a certeza que nessa empresa **mais de 25 empregados são mulheres**.

"...mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino..."

Como 23 empregados marcaram férias para janeiro e há um total de 50 empregados, temos 50−23 = 27 empregados que não marcaram férias para janeiro. Desses 27, **mais de 2/3 são homens**.

$$\frac{2}{3}\,\textbf{de}\ 27 = \frac{2}{3} \times 27 = 18$$

Logo, temos a certeza que nessa empresa **mais de 18 empregados são homens**.

Em resumo, temos as seguintes informações:

- A empresa tem **50 empregados**;
- Mais de **25 empregados** são **mulheres**; e
- Mais de **18 empregados** são **homens**;

O item da questão questiona se é correto afirmar que havia na empresa **no máximo 12 mulheres a mais que homens**. Devemos então **maximizar o número de mulheres** respeitando as informações do enunciado. Para tanto, podemos **minimizar o número de homens**.

Como mais de **18 empregados são homens**, **o número mínimo de homens é 19**. Logo, o número máximo de mulheres é:

$$\underbrace{50}_{\substack{\text{Total de}\\ \text{empregados}}} - \underbrace{19}_{\substack{\text{Número mínimo}\\ \text{de homens}}} = \underbrace{31}_{\substack{\text{Número máximo}\\ \text{de mulheres}}}$$

Isso significa que na empresa havia no máximo 12 mulheres a mais do que homens, pois:

$$\underbrace{31}_{\substack{\text{Número máximo}\\ \text{de mulheres}}} - \underbrace{19}_{\substack{\text{Número mínimo}\\ \text{de homens}}} = 12$$

Gabarito: CERTO.

FCC

13.(FCC/TRT 9/2022) O valor da soma $\frac{1}{2022^{-2}+1} + \frac{1}{2022^{-1}+1} + \frac{1}{2022^{0}+1} + \frac{1}{2022^{1}+1} + \frac{1}{2022^{2}+1}$ é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

Comentários:

Vamos realizar a soma em questão:

$$\frac{1}{\mathbf{2022^{-2}}+1}+\frac{1}{\mathbf{2022^{-1}}+1}+\frac{1}{\mathbf{2022^{0}+1}}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$$

A partir das propriedades da potenciação, sabemos que $\mathbf{2022^{-2}=\frac{1}{2022^2}}$ e que $\mathbf{2022^{-1}=\frac{1}{2022^1}}$. Além disso, $\mathbf{2022^0=1}$. Logo, ficamos com a seguinte soma:

$$\frac{1}{\mathbf{\frac{1}{2022^2}}+1}+\frac{1}{\mathbf{\frac{1}{2022^1}}+1}+\frac{1}{\mathbf{1}+1}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2022^2}+\frac{2022^2}{2022^2}}+\frac{1}{\frac{1}{2022^1}+\frac{2022^1}{2022^1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1+2022^2}{2022^2}}+\frac{1}{\frac{1+2022^2}{2022^1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$$

As duas primeiras parcelas correspondem ao inverso de, respectivamente, $\frac{1+2022^2}{2022^2}$ e $\frac{1+2022^2}{2022^1}$. Ficamos com:

$$\frac{2022^2}{1+2022^2}+\frac{2022^1}{1+2022^1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$$

Reorganizando os denominadores das duas primeiras parcelas, temos:

$$\frac{2022^2}{\mathbf{2022^2+1}}+\frac{2022^1}{\mathbf{2022^1+1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathbf{2022^{1}+1}}+\frac{1}{\mathbf{2022^{2}+1}}$$

Podemos agora somar as frações que apresentam o denominador $\mathbf{2022^2+1}$ e somar as frações que apresentam o denominador $\mathbf{2022^1+1}$. Ficamos com:

$$\frac{2022^2+1}{\mathbf{2022^2+1}}+\frac{2022^1+1}{\mathbf{2022^1+1}}+\frac{1}{2}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{4+1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Gabarito: Letra B.

14. (FCC/TRT 4/2022) Um terreno foi dividido entre quatro irmãos, Ana, Bento, Carla e Daniel. Ana ficou com metade do terreno; Bento ficou com um terço do terreno; Carla ficou com um sétimo do terreno e Daniel ficou com 500 m². A área total do terreno, antes da divisão, era de:

a) 21.000 m²

b) 20.000 m²

c) 25.000 m²

d) 18.000 m²

e) 15.000 m²

Comentários:

Suponha que a área total do terreno seja A. Segundo o enunciado:

- Ana ficou com metade do terreno: $\frac{1}{2}A$;
- Bento ficou com um terço do terreno: $\frac{1}{3}A$;
- Carla ficou com um sétimo do terreno: $\frac{1}{7}A$;
- Daniel ficou com $500\ \text{m}^2$.

A soma das partes recebidas pelos quatro irmãos corresponde à totalidade do terreno. Logo:

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{7}A + 500$$

Como 2, 3 e 7 são primos, o MMC entre eles é $2 \times 3 \times 7 = 42$. Logo:

$$A = \frac{21A + 14A + 6A}{42} + 500$$

$$A = \frac{41}{42}A + 500$$

$$A - \frac{41}{42}A = 500$$

$$\frac{42A - 41A}{42} = 500$$

$$\frac{A}{42} = 500$$

$$A = 500 \times 42$$

$$A = 21.000\ \mathrm{m}^2$$

Gabarito: Letra A.

15. (FCC/TRT 9/2022) Em relação às frações $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ tem-se que

a) $\frac{8}{21} < \frac{7}{15} < \frac{2}{5}$.

b) $\frac{2}{5} < \frac{8}{21} < \frac{7}{15}$.

c) $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{15} < \frac{2}{5} < \frac{8}{21}$.

e) $\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{8}{21}$.

Comentários:

Para comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador comum será o **MMC** entre **5**, **15** e **21**.

Temos a seguinte decomposição em fatores primos dos números:

$5 = \quad 5^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$21 = 3^1 \quad \times 7^1$

O MMC é obtido tomando-se **todos** os fatores primos com os **maiores** expoentes. Logo:

$$\mathrm{MMC}(5; 15; 21) = 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 105$$

As frações equivalentes a $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ com o denominador **105** são:

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} = \frac{(105 \div 15) \times 7}{105} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{105}}$$

$$\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{21}} = \frac{(105 \div 21) \times 8}{105} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{105}}$$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{(105 \div 5) \times 2}{105} = \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{105}}$$

A ordem crescente entre as frações com o denominador 105 é $\frac{40}{105} < \frac{42}{105} < \frac{49}{105}$. Logo, a ordem crescente das frações do problema é $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

Gabarito: Letra C.

16. (FCC/TRT 23/2022) Em uma fábrica de produção de robôs, registrou-se o número total de robôs produzidos em 3 anos. No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total, no segundo ano foram produzidos 1/3 do total e no terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

O número de robôs produzidos no primeiro ano foi

a) 8

b) 10

c) 12

d) 9

e) 6

Comentários:

Suponha que o número total de robôs produzidos em 3 anos seja T. Segundo o enunciado:

- No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total: $\frac{2}{5}T$;
- No segundo ano foram produzidos 1/3 do total: $\frac{1}{3}T$;
- No terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

A soma da produção nos três anos corresponde a T. Logo:

$$T = \frac{2}{5}T + \frac{1}{3}T + 8$$

Como 3 e 5 são primos, o MMC entre eles é $3 \times 5 = 15$. Logo:

$$T = \frac{6T + 5T}{15} + 8$$

$$T = \frac{11}{15}T + 8$$

$$T - \frac{11}{15}T = 8$$

$$\frac{15T - 11T}{15} = 8$$

$$\frac{4T}{15} = 8$$

$$T = \frac{8 \times 15}{4}$$

$$T = 30$$

A questão pergunta pelo número de robôs produzidos no primeiro ano:

$$\frac{2}{5}T$$

$$= \frac{2}{5} \times 30$$

$$= 12$$

Gabarito: Letra C.

17. (FCC/TRT 22/2022) Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores. No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres. No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens, no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres. No máximo, o número de mulheres dentre os 48 funcionários é

a) 31.

b) 17.

c) 25.

d) 13.

e) 12.

Comentários:

Devemos obter o **número máximo de mulheres** dentre os 48 funcionários da empresa **sem que as condições do enunciado sejam violadas**.

"Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores."

Isso significa que, em cada setor, temos $48 \div 4 = 12$ funcionários.

"No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres."

Temos 12 funcionários no setor de Engenharia. $\frac{2}{3}$ **de** 12 são formados em Engenharia Civil. Logo:

- $\frac{2}{3} \times 12 = 8$ **funcionários são formados em Engenharia Civil**;
- Os demais funcionários do setor de Engenharia, $12 - 8 = 4$ **funcionários**, **não são formados em Engenharia Civil**.

Metade dos **funcionários que são formados em Engenharia Civil** são Mulheres. Logo, podemos resumir o setor de Engenharia da seguinte forma:

- **4** funcionários são **mulheres** formadas em **Engenharia Civil**;
- **4** funcionários são **homens** formados em **Engenharia Civil**; e
- **4** funcionários, que podem ser **homens ou mulheres**, **não são formados em Engenharia Civil**.

"No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens..."

Logo, os **12 funcionários** do setor de Contabilidade são **homens**.

"...no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres..."

Temos 12 funcionários no setor de Administração. $\frac{1}{4}$ **de** 12 são mulheres. Logo:

- $\frac{1}{4} \times 12 = 3$ **funcionários são mulheres**;
- $12 - 3 = 9$ **funcionários são homens**.

"...e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres."

Temos 12 funcionários no setor de Arquitetura. $\frac{1}{2}$ **de** 12 são mulheres. Logo:

- $\frac{1}{2} \times 12 = 6$ **funcionários são mulheres**;
- $12 - 6 = 6$ **funcionários são homens**.

—

Veja que, até o momento, o seguinte total de funcionários é necessariamente mulher:

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Setor de Engenharia} \\ \textbf{que} \\ \textbf{são formados em Eng. Civil}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Contabilidade}}} + \underbrace{3}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Administração}}} + \underbrace{6}_{\substack{\text{Setor de} \\ \text{Arquitetura}}} = 13$$

Observe que, segundo as informações presentes no enunciado, não sabemos se são homens ou são mulheres os **04 funcionários do setor de Engenharia que não são formados em Engenharia Civil**.

Veja que **o número de mulheres** será **maximizado** se esses 04 funcionários forem mulheres. Logo, o máximo de mulheres que essa empresa pode ter dentre seus 48 funcionários é:

$$13 + 4 = 17 \text{ mulheres}$$

Gabarito: Letra B.

18. (FCC/TJ CE/2022) Uma pesquisa em uma universidade verificou que cada estudante utiliza-se de apenas um meio de transporte para se deslocar até lá. A pesquisa também mostrou que três quartos de seus estudantes vão de ônibus, um décimo vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os 200 estudantes restantes vão a pé. O número de estudantes entrevistados é igual a

a) 24000.

b) 16000.

c) 20000.

d) 8000.

e) 6000.

Comentários:

Suponha que o número total de estudantes entrevistados seja T. Segundo o enunciado:

- Três quartos dos estudantes vão de ônibus: $\frac{3}{4}T$;
- Um décimo vai de carro: $\frac{1}{10}T$;
- Um oitavo vai de bicicleta: $\frac{1}{8}T$; e
- 200 estudantes restantes vão a pé.

A soma de todos os estudantes entrevistados corresponde a T. Logo:

$$T = \frac{3}{4}T + \frac{1}{10}T + \frac{1}{8}T + 200$$

O MMC entre 4, 8 e 10 é 40. Logo:

$$T = \frac{30T + 4T + 5T}{40} + 200$$

$$T = \frac{39T}{40} + 200$$

$$T - \frac{39T}{40} = 200$$

$$\frac{40T - 39T}{40} = 200$$

$$\frac{T}{40} = 200$$

$$T = 200 \times 40$$

$$T = 8.000$$

Logo, o número de estudantes entrevistados é igual a 8.000.

Gabarito: Letra D.

19.(FCC/TRT 24/2017) Francisco verificou que havia x pastas em um diretório. Ele abriu $\frac{1}{3}$ dessas pastas, deixou as restantes fechadas e foi embora. Geraldo encontra as pastas como Francisco havia deixado, abre $\frac{5}{7}$ das pastas que ainda estavam fechadas e foi embora. Humberto observa a situação das pastas após a intervenção de Geraldo, fecha $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas e abre metade das pastas que encontrou fechadas. Após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a

a) $\frac{31}{42}$

b) $\frac{5}{34}$

c) $\frac{13}{21}$

d) $\frac{15}{34}$

e) $\frac{9}{21}$

Comentários:

Inicialmente temos um total de X pastas fechadas.

<u>Intervenção de Francisco</u>

- Francisco **<u>abriu</u>** $\frac{1}{3}$ de X.

Pastas abertas: $\frac{1}{3}X$

Pastas fechadas: $X - \frac{1}{3}X = \frac{2}{3}X$

<u>Intervenção de Geraldo</u>

- Geraldo **<u>abriu</u>** $\frac{5}{7}$ das pastas que estavam fechadas.

$$\frac{5}{7} \text{ das (pastas que estavam fechadas)}$$

$$= \frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3}X\right)$$

$$= \frac{10}{21}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{1}{3}X + \frac{10}{21}X = \left(\frac{7+10}{21}\right)X = \frac{17}{21}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{2}{3}X - \frac{10}{21}X = \left(\frac{14-10}{21}\right)X = \frac{4}{21}X$

Intervenção de Humberto

- Humberto **fecha** $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas

$$\frac{7}{34} \text{ das (pastas que encontrou abertas)}$$

$$\frac{7}{34} \times \left(\frac{17}{21}X\right)$$

$$= \frac{1}{6}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{17}{21}X - \frac{1}{6}X = \left(\frac{34-7}{42}\right)X = \frac{27}{42}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{4}{21}X + \frac{1}{6}X = \left(\frac{8+7}{42}\right)X = \frac{15}{42}X$

- Humberto abre $\frac{1}{2}$ das pastas que encontrou fechadas (antes da sua intervenção).

$$\frac{1}{2} \text{ das (pastas que encontrou fechadas antes da sua intervenção)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{21}X\right)$$

$$= \frac{2}{21}X$$

Pastas que ficaram abertas: $\frac{27}{42}X + \frac{2}{21}X = \left(\frac{27+4}{42}\right)X = \frac{31}{42}X$

Pastas que ficaram fechadas: $\frac{15}{42}X - \frac{2}{21}X = \left(\frac{15-4}{42}\right)X = \frac{11}{42}X$

Logo, após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a $\frac{31}{42}$.

Gabarito: Letra A.

Vunesp

20.(VUNESP/AVAREPREV/2020) João gasta $\frac{3}{4}$ do seu salário em alimentação e aluguel e economiza $\frac{1}{3}$ do restante. A fração que indica o quanto João economiza do seu salário é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{12}$

Comentários:

Suponha que o salário de João é S.

O valor gasto com alimentação e aluguel é $\frac{3}{4}S$.

O valor que resta após esse gasto é:

$$(\text{Salário}) - (\text{Gasto com alimentação e aluguel})$$

$$= S - \frac{3}{4}S = \frac{4-3}{4}S$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}S}$$

Desse valor restante, João economiza 1/3. Portanto, ele economiza:

$$\frac{1}{3} \text{ de } \boldsymbol{\frac{1}{4}S}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{1}{12}S$$

Gabarito: Letra C.

21. (VUNESP/CODEN/2021) Das pessoas de uma comunidade que participaram de uma pesquisa, apenas $\frac{3}{8}$ concluíram o ensino médio. Entre as pessoas que não concluíram o ensino médio, somente $\frac{1}{4}$ concluiu o ensino fundamental, o que corresponde a 180 pessoas. O número total de pessoas entrevistadas foi

a) 750 pessoas.

b) 875 pessoas.

c) 1 152 pessoas.

d) 1 248 pessoas.

e) 1 450 pessoas.

Comentários:

Considere que o total de pessoas que participaram da entrevista seja T.

Temos, então, que $\frac{3}{8}T$ concluíram o ensino médio.

O total de pessoas que **não concluíram o ensino médio** é:

$$(\text{Total dos entrevistados}) - (\text{Entrevistados que conluíram o ensino médio})$$

$$= T - \frac{3}{8}T$$

$$= \frac{8-3}{8}T = \boldsymbol{\frac{5}{8}T}$$

$\frac{1}{4}$ das pessoas que **não concluíram o ensino médio** concluíram o ensino fundamental, e esse valor corresponde a 180 pessoas.

$$\frac{1}{4}\ \textbf{de}\ (\text{pessoas que não concluiram o ensino médio}) = 180$$

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{8}T\right) = 180$$

$$\frac{5}{32}T = 180$$

$$T = 180 \times \frac{32}{5}$$

$$T = 1152$$

Logo, o número total de pessoas entrevistadas foi 1152.

Gabarito: Letra C.

22. (VUNESP/CODEN/2021) Um comércio tem 4 atendentes e, em determinado dia, foi realizada certa quantidade de vendas, das quais, Maria realizou um quinto dessa quantidade, Renato realizou um terço dessa quantidade, Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato, e Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas. O número de vendas realizadas por Renato foi

a) 18.

b) 15.

c) 12.

d) 9.

e) 6.

Comentários:

Considere que a quantidade total de vendas feita pelos quatro atendentes seja T.

"Maria realizou um quinto dessa quantidade"

$$\boldsymbol{\frac{1}{5}T}$$

"Renato realizou um terço dessa quantidade"

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}T}$$

"Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato"

Note que o total de vendas **não** realizadas por Maria e **não** realizadas por Renato é dado por:

$$\text{Total} - (\text{Vendas da Maria}) - (\text{Vendas do Retanto})$$

$$= T - \frac{1}{5}T - \frac{1}{3}T$$

$$= \frac{15T - 3T - 5T}{15}$$

$$= \boldsymbol{\frac{7}{15}T}$$

Veja que Rosa realizou $\frac{1}{7}$ **das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato**. Logo, ela realizou:

$$\frac{1}{7}\ \mathbf{de}\ \frac{7}{15}T$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{7}{15} T$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{15} T}$$

"Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas"

O restante das vendas corresponde a:

$$(\text{Total}) - (\text{Vendas da Maria}) - (\text{Vendas do Retanto}) - (\text{Vendas da Rosa})$$

$$T - \boldsymbol{\frac{1}{5} T} - \boldsymbol{\frac{1}{3} T} - \boldsymbol{\frac{1}{15} T}$$

$$= \frac{15T - 3T - 5T - 1T}{15}$$

$$= \frac{6}{15} T$$

Esse restante de vendas corresponde a 18 vendas. Logo:

$$\frac{6}{15} T = 18$$

$$T = 18 \times \frac{15}{6}$$

$$T = 3 \times 15$$

$$T = 45$$

A questão pergunta pelo **número de vendas realizadas por Renato**:

$$\boldsymbol{\frac{1}{3} T} = \frac{1}{3} \times 45 = 15$$

Gabarito: Letra B.

23.(VUNESP/Pref. Cananéia/2020) Do número total de questões de uma prova de certo concurso, Isa acertou $\frac{5}{6}$ e Ana acertou $\frac{3}{5}$. Se Isa acertou 14 questões a mais que Ana, então o número de questões que Ana acertou é

a) 50.

b) 46.

c) 40.

d) 36.

e) 30.

Comentários:

Considere que o total de questões **da prova** seja T.

Isa acertou $\frac{5}{6}$ **do** total de questões. Logo, ela acertou $\frac{5}{6}T$.

Ana acertou $\frac{3}{5}$ **do** total de questões. Logo, ela acertou $\frac{3}{5}T$.

Temos que Isa acertou 14 questões a mais do que Ana. Portanto:

$$(\text{Acertos da Isa}) - (\text{Acertos da Ana}) = 14$$

$$\frac{5}{6}T - \frac{3}{5}T = 14$$

$$\frac{25T - 18T}{30} = 14$$

$$\frac{7}{30}T = 14$$

$$T = 14 \times \frac{30}{7}$$

$$T = 2 \times 30$$

$$T = 60$$

O total de questões da prova é 60. O número de questões que Ana acertou é:

$$\frac{3}{5}T = \frac{3}{5} \times 60$$

$$= 3 \times 12$$

$$= 36$$

Gabarito: Letra D.

24. (VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) Para uma atividade recreativa, os alunos tinham que levar palitos de sorvete. Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos, sendo que o número de palitos levados por Ana era igual a $\frac{4}{5}$ do número de palitos levados por Bia. O número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

e) 16.

Comentários:

Considere que o número de palitos levados por Ana seja A e que o número de palitos levados por Bia seja B.

"Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos"

Logo, temos a seguinte relação entre A e B:

$$A + B = 108$$

"...o número de palitos levados por Ana era igual a 4/5 do número de palitos levados por Bia."

Consequentemente, temos a seguinte relação entre A e B:

$$A = \frac{4}{5}B$$

Podemos substituir essa relação em $A + B = 108$:

$$A + B = 108$$

$$\frac{4}{5}B + B = 108$$

$$\frac{4B + 5B}{5} = 108$$

$$\frac{9}{5}B = 108$$

$$B = 108 \times \frac{5}{9}$$

$$B = 12 \times 5$$

$$\boldsymbol{B = 60}$$

Como $A = \frac{4}{5}B$, temos:

$$A = \frac{4}{5}B$$

$$A = \frac{4}{5} \times 60$$

$$A = 4 \times 12$$

$$\boldsymbol{A = 48}$$

Logo, o número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi:

$$B - A$$

$$= 60 - 48$$

$$= 12$$

Gabarito: Letra C.

25. (VUNESP/Pref. Cerquilho/2019) Em uma empresa, apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo. Além disso, da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo, o que corresponde a 40 funcionários. O número de funcionários que concluíram o ensino superior é igual a

a) 10.

b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

Comentários:

Considere que o total de funcionários **da empresa** seja T.

"...apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo."

Logo, o número de funcionários que **não tem** ensino superior completo é:

$$(\text{Total de funcionários}) - (\text{Funcionários com ensino superior})$$

$$T - \frac{1}{5}\ \textbf{de}\ T$$

$$T - \frac{1}{5} \times T$$

$$T - \frac{T}{5}$$

$$= \frac{5T - T}{5}$$

$$= \frac{4}{5}T$$

"...da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo..."

Logo, o total de pessoas que não tem ensino médio completo é:

$$\frac{2}{3}\ \textbf{da}\ (\text{parcela que não concluiu o ensino superior})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}T$$

$$= \frac{8}{15}T$$

"...o que corresponde a 40 funcionários."

Temos que o total de pessoas que não tem ensino médio completo corresponde a 40 funcionários. Logo:

$$\frac{8}{15}T = 40$$

$$T = 40 \times \frac{15}{8}$$

$$T = 5 \times 15$$

$$T = 75$$

A questão pergunta pelo número de funcionários que concluíram o ensino superior, que é $\frac{1}{5}T$:

$$\frac{1}{5}T = \frac{1}{5} \times 75 = 15$$

Gabarito: Letra C

Outras Bancas

26.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Colocar uma barra sobre o período é uma das formas de representar uma dízima periódica: $0,\overline{3} = 0,333\ldots$ A expressão $0,\overline{4} + 0,1\overline{6}$ é igual a:

a) $\frac{51}{100}$

b) $\frac{511}{1000}$

c) $\frac{11}{18}$

d) $\frac{14}{15}$

e) $\frac{5}{9}$

Comentários:

Vamos realizar a soma, separando o período de $0{,}1\overline{6}$ do restante do número:

$$0,\overline{4} + 0{,}1\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + 0{,}1 + 0{,}0\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + 0{,}1 + \frac{1}{10} \times 0,\overline{6}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{6}{9}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{10} + \frac{6}{90}$$

$$= \frac{40 + 9 + 6}{90}$$

$$= \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

Gabarito: Letra C.

27. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Baldo usa uma calculadora que ignora todos os valores após a primeira casa decimal no resultado de cada operação realizada. Desse modo, quando Baldo faz $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$, a calculadora mostra o resultado de 1,3 × 1,2 = 1,5. Portanto, há um erro no valor final de 0,1, pois $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{15} = 1,6$.

Qual o erro da calculadora de Baldo para a expressão $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$

a) 0

b) 1,3

c) 1,5

d) 2,8

e) 3,3

Comentários:

Temos que $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$. A calculadora, ao realizar a operação, apresenta o valor 3,3.

Assim, a expressão dada por $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$ fica assim:

$$\big((3{,}3 \times 3{,}3)\big) \times 9$$

O produto $3{,}3 \times 3{,}3$ é igual a $10{,}89$. A calculadora, ao realizar a operação, apresenta o valor $10{,}8$. Ficamos com:

$$(10{,}8) \times 9$$

Finalmente, o produto $10{,}8 \times 9$ é igual a $\mathbf{97,2}$. Como temos apenas uma casa decimal, **a calculadora apresenta exatamente esse valor**.

Agora que temos o valor obtido pela calculadora, vamos obter o **real valor da operação**:

$$\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$$

$$= \frac{10 \times 10}{3 \times 3} \times 9$$

$$= \frac{100}{9} \times 9$$

$$= 100$$

Portanto, o erro da calculadora foi de:

$$\text{Erro} = \text{Valor real} - \text{Valor calculado}$$

$$= 100 - 97{,}2 = 2{,}8$$

Gabarito: Letra D.

28. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Numa cidade, 4 em cada 15 pessoas são estrangeiras. Dessas pessoas estrangeiras, 3 em cada 8, são crianças.

Nessa cidade, as pessoas que NÃO são crianças estrangeiras correspondem a que fração da população?

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{16}{23}$

d) $\frac{14}{45}$

e) $\frac{43}{120}$

Comentários:

Considere que o total de pessoas da cidade é T. Nesse caso, o **número de estrangeiros** é:

$$\boldsymbol{\frac{4}{15}T}$$

$\frac{3}{8}$ **dos estrangeiros** são crianças. Portanto, o **total de <u>crianças estrangeiras</u>** é:

$$\frac{3}{8}\ \textbf{dos}\ (\textbf{estrangeiros})$$

$$= \frac{3}{8} \times \boldsymbol{\frac{4}{15}T}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}T$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{10}T}$$

O total da população que **<u>não é</u>** **<u>criança estrangeira</u>** é:

$$T - \boldsymbol{\frac{1}{10}T} = \frac{10-1}{10}T = \frac{9}{10}T$$

Portanto, a fração da população que corresponde às pessoas que **<u>NÃO são</u>** **<u>crianças estrangeiras</u>** é $\frac{9}{10}$.

Gabarito: Letra B.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Razão e proporção

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022) Sobre 4 grandezas X, Y, Z e W sabe-se que:

A razão de W para X é 4:3

A razão de Y para Z é 3:2

A razão de Z para X é 1:6

A razão de X+Y para Z+W é

a) 5:6

b) 4:7

c) 3:5

d) 6:11

e) 8:11

Comentários:

O enunciado pergunta pela seguinte razão:

$$\frac{X+Y}{Z+W}$$

Para obter o valor numérico dessa razão, **vamos escrever as incógnitas $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{W}$ em termos de $\boldsymbol{X}$**.

Após realizar a substituição de Y, Z e W na razão anterior, perceba que **a incógnita $\boldsymbol{X}$ do numerador será simplificada com a incógnita $\boldsymbol{X}$ do denominador**.

Segundo o enunciado:

- **A razão de W para X é 4:3** $\rightarrow \frac{W}{X} = \frac{4}{3} \rightarrow \boldsymbol{W = \frac{4}{3}X}$
- **A razão de Y para Z é 3:2** $\rightarrow \frac{Y}{Z} = \frac{3}{2} \rightarrow \boldsymbol{Y = \frac{3}{2}Z}$
- **A razão de Z para X é 1:6** $\rightarrow \frac{Z}{X} = \frac{1}{6} \rightarrow \boldsymbol{Z = \frac{1}{6}X}$

Note que, como $\boldsymbol{Y = \frac{3}{2}Z}$ e $\boldsymbol{Z = \frac{1}{6}X}$, temos:

$$Y = \frac{3}{2}Z$$

$$Y = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}X\right)$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{1}{4}X}$$

Agora que temos Y, Z e W em termos de X, vamos substituir os valores na razão procurada:

$$\frac{X + \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{W}} = \frac{X + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{X}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{X}} = \frac{\frac{4X + 1X}{4}}{\frac{1X + 8X}{6}} = \frac{\frac{5X}{4}}{\frac{9X}{6}} = \frac{\frac{\boldsymbol{5X}}{\boldsymbol{4}}}{\frac{\boldsymbol{3X}}{\boldsymbol{2}}}$$

Para a divisão de frações, podemos utilizar o recurso "**inverte e multiplica**":

$$= \frac{\boldsymbol{5X}}{\boldsymbol{4}} \times \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3X}}$$

Simplificando a incógnita X, temos:

$$= \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Logo, **a razão de X+Y para Z+W é 5:6**.

Gabarito: Letra A.

2.(FGV/TRT-PB/2022) Em uma reunião de condomínio, há jovens com até 21 anos, adultos com mais de 21 e menos de 60 anos, e idosos com 60 anos ou mais. Para cada 2 jovens há 5 adultos e para cada 7 adultos há 3 idosos.

A razão entre o número de jovens e o número total de pessoas presentes a essa reunião é

a) 2/15.

b) 7/15.

c) 3/14.

d) 2/17.

e) 7/32.

Comentários:

Considere que temos J jovens, A adultos e I idosos. A questão pergunta pela razão entre o número de jovens e o total de pessoas:

$$\frac{J}{J+A+I}$$

Para resolver o problema, **vamos escrever $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}$ em termos de $\boldsymbol{J}$**.

Após realizar a substituição de A e I na razão anterior, perceba que **a incógnita $\boldsymbol{J}$ do numerador será simplificada com a incógnita $\boldsymbol{J}$ do denominador**.

Segundo o enunciado, **para cada 2 jovens há 5 adultos**. Logo:

$$\frac{J}{A}=\frac{2}{5}$$

$$5J=2A$$

$$\boldsymbol{A=\frac{5}{2}J}$$

Além disso, **para cada 7 adultos há 3 idosos**. Logo:

$$\frac{A}{I}=\frac{7}{3}$$

$$3A=7I$$

$$\boldsymbol{I=\frac{3}{7}A}$$

Note que **$\boldsymbol{I}$ ainda não está escrito em termos de $\boldsymbol{J}$**. Porém, usando o fato de que $\boldsymbol{A=\frac{5}{2}J}$, temos:

$$\boldsymbol{I=\frac{3}{7}A}$$

$$I=\frac{3}{7}\times\left(\boldsymbol{\frac{5}{2}J}\right)$$

$$\boldsymbol{I=\frac{15}{14}J}$$

Agora que temos A e I em termos de J, podemos calcular a razão solicitada:

$$\frac{J}{J+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}}$$

$$= \frac{J}{J + \frac{5}{2}J + \frac{15}{14}J}$$

$$= \frac{J}{\frac{14J + 35J + 15J}{14}}$$

$$= \frac{J}{\frac{64}{14}J}$$

Simplificando J, temos:

$$= \frac{1}{\frac{64}{14}}$$

$$= \frac{14}{64}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 2, temos:

$$= \frac{7}{32}$$

Gabarito: Letra E.

3.(FGV/TRT MA/2022) Michael coleciona moedas brasileiras, americanas e francesas. Para cada 3 moedas americanas Michael tem 7 moedas brasileiras e para cada 5 moedas brasileiras, ele tem 2 francesas.

Com relação às moedas de Michael, a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras é igual a

a) 7/5.

b) 12/7.

c) 25/19.

d) 30/23.

e) 35/29.

Comentários:

Considere que Michael apresenta B moedas brasileiras, A moedas americanas e F moedas francesas.

Devemos obter a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras, isto é, devemos obter:

$$\frac{B}{A+F}$$

Para obter essa razão, vamos escrever A e F em função da quantidade B.

Note que para cada 3 moedas americanas, Michael tem 7 moedas brasileiras. Logo:

$$\frac{A}{B}=\frac{3}{7}$$

$$\boldsymbol{A=\frac{3}{7}B}$$

Além disso, para cada 5 moedas brasileiras, Michel tem 2 francesas. Logo:

$$\frac{B}{F}=\frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{F=\frac{2}{5}B}$$

Portanto, a razão procurada é:

$$\frac{B}{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}}$$

$$=\frac{B}{\boldsymbol{\frac{3}{7}B}+\boldsymbol{\frac{2}{5}B}}$$

$$=\frac{B}{\frac{15B+14B}{35}}$$

$$=\frac{B}{\frac{29B}{35}}$$

$$=\frac{1}{\frac{29}{35}}$$

$$=\frac{35}{39}$$

Gabarito: Letra E.

4.(FGV/SEAD-AP/2022) Em uma urna há apenas bolas azuis, brancas e verdes. Para cada 2 bolas azuis há 5 bolas brancas. Para cada 3 bolas verdes há uma bola azul.

A razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas nessa urna é igual a

a) 3/8.

b) 4/9.

c) 5/13.

d) 6/11.

e) 7/15.

Comentários:

Considere que temos $\boldsymbol{A}$ **bolas azuis**, $\boldsymbol{B}$ **bolas brancas** e $\boldsymbol{V}$ **bolas verdes**.

Queremos obter a **razão** entre o **número de bolas brancas** e o **número total de bolas** da urna. Em outras palavras, queremos obter:

$$\frac{B}{A+B+V}$$

Para resolver o problema, **vamos escrever $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{V}$ em termos de $\boldsymbol{B}$**. Nesse caso, ao inserir os valores de A e de V na razão solicitada, a **incógnita $\boldsymbol{B}$ será simplificada no numerador e no denominador**.

Para cada 2 bolas azuis, há 5 bolas brancas. Logo:

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{5} \rightarrow \boldsymbol{A = \frac{2}{5}B}$$

Além disso, para **cada 3 bolas verdes, há uma bola azul**. Logo:

$$\frac{V}{A} = \frac{3}{1} \rightarrow \boldsymbol{V = 3A}$$

Como $\boldsymbol{A = \frac{2}{5}B}$, temos:

$$V = 3 \times \left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{B}\right)$$

$$\boldsymbol{V = \frac{6}{5}B}$$

Portanto, a razão procurada é:

$$\frac{B}{A+B+V}$$

$$= \frac{B}{\frac{2}{5}B + B + \frac{6}{5}B}$$

$$= \frac{B}{\frac{2B + 5B + 6B}{5}}$$

$$= \frac{B}{\frac{13B}{5}}$$

$$= B \times \frac{5}{13B}$$

$$= \frac{5}{13}$$

Gabarito: Letra C.

5.(FGV/SEJUSP-MG/2022) Em um grupo de 120 pessoas, 50 são adultos (de 21 a 60 anos) e para cada 2 jovens (até 20 anos) há 5 idosos (acima de 60 anos).

Nesse grupo, o número total de vacinados contra a COVID-19 é o triplo do número de não vacinados. Além disso, metade dos vacinados são idosos e 1/3 dos vacinados são adultos.

É correto concluir que nesse grupo de pessoas há

a) 20 adultos não vacinados.

b) 20 jovens vacinados.

c) 50 idosos vacinados.

d) 10 idosos não vacinados.

e) 10 jovens não vacinados.

Comentários:

No grupo de 120 pessoas, temos **50 adultos**. Logo, o **total de pessoas entre jovens e idosos** é:

$$120 - 50 = \mathbf{70}$$

Sabemos que para cada 2 jovens há 5 idosos.

Note que, considerando apenas jovens e idosos, **a cada 7 pessoas**, **2 são jovens** e **5 são idosos**. Isso significa que, **dentre os 70 jovens e idosos**, **20 são jovens** e **50 são idosos**.

Em resumo, temos:

- **20 jovens;**
- **50 adultos; e**
- **50 idosos.**

No grupo de 120 pessoas, o número total de vacinados é o triplo do número de não vacinados. Considere que o total de vacinados é V e que o total de não vacinados é N. Nesse caso:

$$\boldsymbol{V = 3N}$$

Como a soma dos vacinados e não vacinados é 120, temos:

$$\boldsymbol{V} + N = 120$$

$$\boldsymbol{3N} + N = 120$$

$$4N = 120$$

$$N = 30$$

Substituindo $N = 30$ em $V = 3N$, temos:

$$V = 3N$$

$$V = 3 \times 30$$

$$V = 90$$

Em resumo, temos:

- **90 vacinados; e**
- **30 não vacinados.**

Metade dos vacinados são idosos. Logo, 90/2 = **45 idosos são vacinados**.

Além disso, 1/3 dos vacinados são adultos. Logo, 90/3 = **30 adultos são vacinados**.

O restante dos vacinados são jovens. Logo, o total de jovens vacinados é:

$$90 - 45 - 30$$

$$= \textbf{15 jovens são vacinados}$$

Portanto, temos o seguinte quantitativo de pessoas:

	Total	**Vacinados**	**Não vacinados**
Jovens	20	15	20−15 = 5
Adultos	50	30	**50−30 = 20**
Idosos	50	45	50−45 = 5

Portanto, é correto concluir que nesse grupo de pessoas há 20 adultos não vacinados.

Gabarito: Letra A.

6. (FGV/CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que **originalmente** o número de **homens** e o número de **mulheres** seja igual a X, **totalizando** $2X$ **pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Cebraspe

7.(CESPE/PM AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue o item subsequente.

Para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B é suficiente acrescentar no tanque A uma quantidade de álcool que é inferior a 25 L.

Comentários:

Devemos determinar a quantidade x de álcool foi acrescentada no tanque A para que ele fique com a mesma **proporção álcool/gasolina** do tanque B.

Após a inserção dessa quantidade x de álcool no tanque A, esse tanque fica com **60 + x litros** de álcool e continua com **240 litros** de gasolina.

$$\begin{matrix}\text{Proporção álcool/gasolina do tanque A depois} \\ \text{de acrescentar x litros de álcool}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Proporção álcool/gasolina} \\ \text{do tanque B}\end{matrix}$$

$$\frac{60 + x}{240} = \frac{50}{150}$$

$$60 + x = 240 \times \frac{50}{150}$$

$$60 + x = 240 \times \frac{1}{3}$$

$$x = 80 - 60$$

$$x = 20 \text{ litros}$$

Logo, para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B, devemos acrescentar no tanque A **20 litros de álcool**, valor que é **inferior a 25 litros**.

Gabarito: CERTO.

8.(CESPE/STM/2011) Determinado órgão promoveu concurso público para provimento de vagas de um cargo de nível médio e um de nível superior. As remunerações mensais dos cargos de nível médio e de nível superior eram números diretamente proporcionais a 2 e 3; e a remuneração mensal do cargo de nível médio era R$ 3.000,00 menor que a remuneração do cargo de nível superior.

A respeito dessa situação, julgue o item que se segue.

A soma das remunerações mensais dos 2 cargos é superior a R$ 16.000,00.

Comentários:

Considere que a remuneração do cargo de **nível superior** é $\boldsymbol{s}$. Nesse caso, a remuneração do cargo de **nível médio** é $\boldsymbol{m} = s - 3.000$.

As remunerações mensais dos cargos de **nível médio** e de **nível superior** são diretamente proporcionais a 2 e 3. Logo:

$$\frac{m}{2} = \frac{s}{3} = k$$

$$\frac{s - 3000}{2} = \frac{s}{3} = k$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{s-3000}{2} = \frac{s}{3}$, temos:

$$3 \times (s - 3.000) = 2s$$

$$3s - 9.000 = 2s$$

$$s = R\$\ 9.000$$

Logo, a remuneração de **nível superior** é 9.000 e a remuneração de **nível médio** é:

$$m = s - 3.000$$

$$m = 9.000 - 3.000$$

$$m = R\$\ 6.000$$

Portanto, a soma das remunerações é:

$$s + m = 9.000 + 6.000 = R\$\ 15.000$$

Gabarito: ERRADO.

FCC

9.(FCC/SEDU ES/2022) Dona Paula pediu aos alunos de sua turma que formassem dois grupos. Ao final, ela percebeu que o grupo A ficou formado por 12 rapazes e 6 moças e o grupo B ficou com 18 moças. Para que a proporção de rapazes fique a mesma nos dois grupos e apenas retirando rapazes do grupo A e os colocando no grupo B, o número de rapazes que devem ir para o grupo B é:

a) 8.

b) 5.

c) 6.

d) 3.

e) 9.

Comentários:

Suponha que vamos **retirar x rapazes** do grupo A para colocá-los no grupo B. Note que, **após essa retirada**:

- O grupo A apresenta $(12 - x)$ rapazes e 6 moças; e
- O grupo B apresenta x rapazes e 18 moças.

Após a retirada, a proporção de rapazes deve ser a mesma nos dois grupos. Em outras palavras, a razão entre rapazes e moças deve ser igual para os grupos A e B. Portanto:

$$\frac{\text{Rapazes grupo A}}{\text{Moças grupo A}} = \frac{\text{Rapazes grupo B}}{\text{Moças grupo B}}$$

$$\frac{(12 - x)}{6} = \frac{x}{18}$$

Realizando a multiplicação cruzada, temos:

$$18 \times (12 - x) = 6 \times x$$

$$216 - 18x = 6x$$

$$216 = 6x + 18x$$

$$24x = 216$$

$$x = 9$$

Logo, o número de rapazes que devem sair do grupo A para ir para o grupo B é 9.

Gabarito: Letra E.

10. (FCC/CBM AP/2022) Considere a seguinte recomendação sobre a aquisição de veículos de suporte básico (B) e avançado (A):

As ambulâncias de suporte básico à vida devem ser adquiridas na proporção de um veículo para cada grupo de 100 a 150 mil habitantes, e as de suporte avançado à vida de um veículo para cada grupo de 400 a 450 mil habitantes.

De acordo com essa recomendação, os atuais veículos de suporte básico de uma cidade seriam suficientes para, no máximo, 750 mil habitantes, e os de suporte avançado para, no máximo, 450 mil habitantes. Se a cidade possui atualmente 1 milhão de habitantes, as quantidades mínimas de veículos de suporte básico (B) e de veículos de suporte avançado (A) a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

a) A = 1 e B = 2

b) A = 1 e B = 3

c) A = 1 e B = 4

d) A = 2 e B = 2

e) A = 2 e B = 3

Comentários:

Segundo o enunciado, temos a seguinte recomendação:

- Uma ambulância de **suporte básico (B)** para cada 100 a **150mil habitantes**;
- Uma ambulância de **suporte avançado (A)** para cada 400 a **450mil habitantes**.

Perceba, portanto, que podemos utilizar o **limite máximo de habitantes** do enunciado **sem que isso viole a recomendação**. Em outras palavras:

- A razão entre ambulâncias de **suporte básico (B)** e habitantes deve ser de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{150\ mil}}$ ou maior;
- A razão entre ambulâncias de **suporte avançado (A)** e habitantes deve ser de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{450\ mil}}$ ou maior.

Na cidade considerada, temos ambulâncias de **suporte básico (B)** para, **no máximo**, 750 mil habitantes. Logo, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, temos o seguinte número de ambulâncias de suporte básico:

$$\frac{\mathrm{B}_{\mathrm{Atuais}}}{750\ \mathrm{mil}} = \frac{1}{150\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{Atuais}} = \frac{1 \times 750\ \mathrm{mil}}{150\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathbf{B_{Atuais} = 5}$$

Além disso, a cidade apresenta ambulâncias de **suporte avançado (A)** para, **no máximo**, 450 mil habitantes. Isso significa que ela apresenta uma única ambulância de suporte avançado.

$$\frac{\mathrm{A_{Atuais}}}{450\ \mathrm{mil}} = \frac{1}{450\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathbf{A_{Atuais} = 1}$$

A cidade apresenta, atualmente, **1 milhão de habitantes**.

O número de ambulâncias de **suporte básico (B)** necessárias, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, é tal que:

$$\frac{\mathrm{B_{Necessárias}}}{1\ \mathrm{milhão}} = \frac{1}{150\ \mathrm{mil}}$$

$$\mathrm{B_{Necessárias}} = \frac{1 \times 1.000.000}{150.000}$$

$$\mathrm{B_{Necessárias}} = 6{,}66$$

Como devemos ter um número inteiro de ambulâncias:

$$\mathbf{B_{Necessárias} = 7}$$

O número de ambulâncias de **suporte avançado (A)** necessárias, considerando o limite máximo de habitantes da recomendação, é tal que:

$$\frac{A_{\mathrm{Necessárias}}}{1\ \mathrm{milhão}} = \frac{1}{450\ \mathrm{mil}}$$

$$A_{\mathrm{Necessárias}} = \frac{1 \times 1.000.000}{450.000}$$

$$A_{\mathrm{Necessárias}} = 2{,}22$$

Como devemos ter um número inteiro de ambulâncias:

$$\mathbf{A_{Necessárias} = 3}$$

As quantidades mínimas de veículos de **suporte básico (B)** e de veículos de **suporte avançado (A)** a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_{Necessárias}} - \mathbf{A_{Atuais}} = 3 - 1 = 2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_{Necessárias}} - \mathbf{B_{Atuais}} = 7 - 5 = 2$$

O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Gabarito: Letra D.

11. (FCC/TRT 19/2022) Pedro e Marco resolveram juntos uma prova com 30 questões. Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. A diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de

a) 6

b) 8

c) 12

d) 10

e) 9

Comentários:

Considere que Pedro e Marco resolveram, respectivamente, P e M questões da prova.

Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. Logo:

$$\frac{P}{M} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{2}{3}M$$

O total de questões da prova é 30. Logo:

$$P + M = 30$$

Substituindo $P = \frac{2}{3}M$ na equação anterior, temos:

$$\frac{2}{3}M + M = 30$$

$$\frac{2M + 3M}{3} = 30$$

$$\frac{5}{3}M = 30$$

$$M = \frac{30 \times 3}{5}$$

$$M = 18$$

Agora que sabemos que Marco resolveu 18 questões, temos:

$$P + M = 30$$

$$P + 18 = 30$$

$$P = 30 - 18$$

$$P = 12$$

Logo, a diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de:

$$M - P = 18 - 12$$

$$= 6$$

Gabarito: Letra A.

12.(FCC/ALAP/2020) Para fazer um refresco de maracujá utiliza-se uma parte de suco de maracujá concentrado e três partes de água. Assim, a fim de obter 20 L de refresco de maracujá, além do suco concentrado, o número necessário de garrafas de 1,5 L de água é

a) 7

b) 9

c) 8

d) 10

e) 6

Comentários:

Para obter um total de 20 L de refresco, a soma dos volumes em litros de suco de maracujá (M) e de água (A) deve ser 20:

$$M + A = 20$$

A razão entre o volume de suco de maracujá e o volume de água é dada por:

$$\frac{M}{A} = \frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1}{3}A$$

Substituindo a expressão acima em $M + A = 20$, obtemos:

$$\frac{1}{3}A + A = 20$$

$$\frac{4}{3}A = 20$$

$$A = \frac{20 \times 3}{4}$$

$$A = 15$$

Precisamos de 15 litros de água, e isso corresponde a 10 garrafas de 1,5 L, pois:

$$\frac{15 \text{ litros}}{1{,}5 \text{ litros por garrafa}} = 10 \text{ garrafas}$$

Gabarito: Letra D.

Vunesp

13.(VUNESP/Pref Olímpia/2019) Em um determinado posto de atendimento ao público, há 2 filas de espera, uma para atendimento preferencial e outra para atendimento não preferencial. Na fila para atendimento não preferencial, há 45 pessoas. Sabendo que a razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial e o número de pessoas na fila para atendimento não preferencial é $\frac{2}{5}$, então o número de pessoas na fila para atendimento preferencial é

a) 16.

b) 18.

c) 20.

d) 22.

e) 24.

Comentários:

Sabemos que há **45 pessoas** na fila para atendimento **não** preferencial.

Considere que temos $\boldsymbol{P}$ **pessoas** na fila para atendimento preferencial.

A razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial ($\boldsymbol{P}$) e o número de pessoas na fila para atendimento **não** preferencial (**45**) é $\frac{2}{5}$. Logo:

$$\frac{P}{45} = \frac{2}{5}$$

$$P = 45 \times \frac{2}{5}$$

$$P = 9 \times 2$$

$$P = 18$$

Gabarito: Letra B.

14.(VUNESP/CODEN/2021) Em certa empresa, os funcionários têm, pelo menos, o ensino médio completo e sabe-se que, para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo. Se nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários, então a diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a

a) 80.

b) 88.

c) 96.

d) 104.

e) 112.

Comentários:

Considere que temos S funcionários com o ensino superior completo e M funcionários com **somente** o ensino médio completo.

"...para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo..."

Logo, temos a seguinte razão:

$$\boldsymbol{\frac{S}{M} = \frac{1}{4}}$$

"...nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários..."

Portanto, temos:

$$\boldsymbol{S + M = 160}$$

Com base nas duas equações que obtemos, é possível obter os valores de S e de M.

Realizando a "**multiplicação cruzada**" na primeira equação, temos:

$$\frac{S}{M} = \frac{1}{4}$$

$$4S = 1M$$

$$M = 4S$$

Substituindo M por $4S$ na segunda equação, temos:

$$S + M = 160$$

$$S + 4S = 160$$

$$5S = 160$$

$$\boldsymbol{S = 32} \text{ funcionários}$$

Como $M = 4S$, temos:

$$M = 4 \times 32$$

$$\boldsymbol{M = 128} \text{ funcionários}$$

A diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a:

$$M - S = 128 - 32$$

$$= 96$$

Gabarito: Letra C.

15. (VUNESP/FITO/2020) Em um grupo de amigos, o número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Sabendo-se que a razão entre os números de não casados e casados é $\frac{3}{4}$, o número de pessoas nesse grupo é igual a

a) 14.

b) 21.

c) 28.

d) 35.

e) 42.

Comentários:

Considere que o **número de casados** é $\boldsymbol{C}$ e o **número de não casados** é $\boldsymbol{N}$.

O número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Logo:

$$C = N + 3$$

A razão entre os números de não casados e casados é 3/4. Logo:

$$\frac{N}{C} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{N}{N+3} = \frac{3}{4}$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**", temos:

$$4N = 3 \times (N + 3)$$

$$4N = 3N + 9$$

$$4N - 3N = 9$$

$$N = 9$$

O número de casados é:

$$C = N + 3$$

$$= 9 + 3$$

$$= 12$$

Portanto, o número de pessoas desse grupo é:

$$C + N = 12 + 9 = 21$$

Gabarito: Letra B.

16. (VUNESP/FITO/2020) Sobre os 1 430 candidatos que prestaram a última fase de um concurso, sabe-se que a razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é $\frac{4}{7}$. O número de candidatos aprovados nessa fase do concurso é

a) 520.

b) 530.

c) 540.

d) 550.

e) 560.

Comentários:

Seja $\boldsymbol{A}$ o número de **aprovados** e $\boldsymbol{N}$ o número de **não aprovados**.

O total de candidatos é 1.430. Logo:

$$A + N = 1.430$$

A razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é 4/7. Logo:

$$\frac{A}{N} = \frac{4}{7}$$

Podemos escrever N em função de A. Ao realizar a "**multiplicação cruzada**", temos:

$$7A = 4N$$

$$\boldsymbol{N = \frac{7}{4}A}$$

Substituindo o valor de N em $A + N = 1.430$, temos:

$$A + \boldsymbol{\frac{7}{4}A} = 1.430$$

$$\frac{4+7}{4}A = 1.430$$

$$\frac{11}{4}A = 1.430$$

$$A = 4 \times \frac{1.430}{11}$$

$$A = 520$$

Gabarito: Letra A.

Outras Bancas

17.(CESGRANRIO/BB/2012) Numa pesquisa sobre acesso à internet, três em cada quatro homens e duas em cada três mulheres responderam que acessam a rede diariamente. A razão entre o número de mulheres e de homens participantes dessa pesquisa é, nessa ordem, igual a $\frac{1}{2}$.

Que fração do total de entrevistados corresponde àqueles que responderam que acessam a rede todos os dias?

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{17}{24}$

e) $\frac{25}{36}$

Comentários:

Considere que na pesquisa temos H homens e M mulheres.

Como três a cada quatro homens acessam a rede diariamente, o **número de homens que acessam a rede diariamente** é $\frac{3}{4}H$.

Como duas a cada três mulheres acessam a rede diariamente, o **número de mulheres que acessam a rede diariamente** é $\frac{2}{3}M$.

A razão entre o número de mulheres e de homens é $\frac{1}{2}$. Logo, $\boldsymbol{\frac{M}{H} = \frac{1}{2}}$.

A questão pergunta a **fração do total de entrevistados** que corresponde àqueles que responderam que acessam a rede diariamente. Logo, devemos determinar o seguinte valor:

$$\frac{\text{Total de homens e mulheres que acessam a rede diariamente}}{\text{Total de homens e mulheres}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}H + \frac{2}{3}M}{H + M}$$

Para determinar o valor de $\frac{\frac{3}{4}H+\frac{2}{3}M}{H+M}$, devemos escrever tudo em função de H ou tudo em função de M. Como $\frac{M}{H} = \frac{1}{2}$, temos $\boldsymbol{H = 2M}$. Substituindo **essa informação** em $\frac{\frac{3}{4}H+\frac{2}{3}M}{H+M}$, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}H + \frac{2}{3}M}{H + M}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\boldsymbol{2M} + \frac{2}{3}M}{\boldsymbol{2M} + M}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}M + \frac{2}{3}M}{3M}$$

$$= \frac{\frac{9+4}{6}M}{3M}$$

$$= \frac{\frac{13}{6}}{3} = \frac{13}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{18}$$

Gabarito: Letra C.

18.(CESGRANRIO/BR/2015) Uma empresa substituiu seus monitores antigos no formato fullscreen, cuja proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3, por monitores novos no formato widescreen, com proporção entre largura e altura dada por 16:9. Os monitores novos e antigos têm a mesma altura.

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por

a) 1:4

b) 3:4

c) 4:3

d) 4:9

e) 9:4

Comentários:

Suponha que a altura dos dois monitores é A. Considere também que a **largura do modelo novo é L_N** e a **largura do modelo antigo é L_A**. Nesse caso, a questão pergunta pela razão $\frac{L_N}{L_A}$.

Para o **monitor antigo**, a proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3. Logo:

$$\frac{L_A}{A} = \frac{4}{3} \rightarrow L_A = \frac{4}{3}A$$

Para o **monitor novo**, a proporção entre a largura e a altura da tela é de 16:9. Logo:

$$\frac{L_N}{A} = \frac{16}{9} \rightarrow L_N = \frac{16}{9}A$$

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por:

$$\frac{L_N}{L_A} = \frac{\frac{16}{9}A}{\frac{4}{3}A} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{16}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

Gabarito: Letra C.

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Proporcionalidade

FGV

1.(FGV/SEFAZ-MG/2023) Uma grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B que, por sua vez, é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C.

Quando A = 12, tem-se B = 4 e C = 6.

Quando C = 4, o valor de A é

a) 144.

b) 72.

c) 27.

d) 18.

e) 12.

Comentários:

Sabemos que a grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{A}{B} = k_1$$

Além disso, a grandeza B é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{B}{\frac{1}{C^2}} = k_2$$

$$BC^2 = k_2$$

Quando $A = 12$, tem-se $B = 4$ e $C = 6$. Logo:

$$\frac{A}{B} = k_1 \rightarrow \frac{12}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 3}$$

$$BC^2 = k_2 \rightarrow 4 \times 6^2 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 144}$$

A questão pergunta pelo valor de A quando $C = 4$. Para obter o valor de A, vamos utilizar os valores das constantes obtidas.

$$BC^2 = k_2 \rightarrow B \times 4^2 = 144 \rightarrow B = \frac{144}{16} \rightarrow \boldsymbol{B = 9}$$

$$\frac{A}{B} = k_1 \rightarrow \frac{A}{9} = 3 \rightarrow \boldsymbol{A = 27}$$

Logo, quando **$C = 4$, o valor de A é 27**.

Gabarito: Letra C.

2.(FGV/CM Taubaté/2022) Sobre 3 grandezas X, Y e Z sabe-se que X é diretamente proporcional a Y e que Z é inversamente proporcional a X.

Quando Y = 3, tem-se X = 6 e Z = 1/2.

Quando X = 3, o valor de Y + Z é

a) 5/2.

b) 3/2.

c) 4.

d) 4/3.

e) 7/3.

Comentários:

Sabemos que a grandeza X é diretamente proporcional à grandeza Y. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{X}{Y} = k_1$$

Além disso, a grandeza Z é inversamente proporcional à grandeza X. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$ZX = k_2$$

Quando $Y = 3$, tem-se $X = 6$ e $z = 1/2$. Logo:

$$\frac{X}{Y} = k_1 \rightarrow \frac{6}{\boldsymbol{3}} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 2}$$

$$ZX = k_2 \rightarrow \frac{1}{2} \times 6 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 3}$$

Devemos determinar o valor de $Y + Z$ para o caso em que $X = 3$.

$$\frac{X}{Y} = k_1 \rightarrow \frac{3}{Y} = 2 \rightarrow Y = \frac{3}{2}$$

$$ZX = k_2 \ \rightarrow Z \times 3 = 3 \rightarrow Z = 1$$

Logo, **para $X = 3$**, temos:

$$Y + Z = \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{3+2}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Gabarito: Letra A.

3.(FGV/TRT-PB/2022) Uma distribuidora de produtos químicos recebeu 1600 litros de certo composto e deve distribuir toda essa quantidade entre 5 laboratórios em partes proporcionais aos números 3, 4, 5, 6 e 7.

O laboratório que receber a menor quantidade receberá

a) 190 litros.

b) 192 litros.

c) 194 litros.

d) 196 litros.

e) 198 litros.

Comentários:

Os 1.600 litros do composto foram divididos em partes proporcionais a 3, 4, 5, 6 e 7. Se as partes forem respectivamente a, b, c, d e e, então:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6} = \frac{e}{7} = k$$

A soma das partes totaliza 1.600 litros. Logo, $a + b + c + d + e = 1.600$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6} = \frac{e}{7}$, temos:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{d}{6} = \frac{e}{7} = \frac{a+b+c+d+e}{3+4+5+6+7}$$

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}=\frac{1.600}{25}$$

$$\boxed{\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{e}{7}=64}$$

O laboratório que irá receber a menor parte é aquele que receberá uma quantidade de litros diretamente proporcional a 3. Logo:

$$\frac{a}{3}=64$$

$$a=3\times 64$$

$$a=192 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra B.

4.(FGV/TRT MA/2022) Uma empresa de engenharia está realizando as obras X, Y e Z. Foram comprados 360 sacos de cimento que deverão ser repartidos entre as obras X, Y e Z em partes proporcionais aos números 4, 7 e 9, respectivamente.

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é

a) 108.

b) 112.

c) 120.

d) 126.

e) 144.

Comentários:

Devemos dividir 360 sacos em partes diretamente proporcionais a 4, 7 e 9. Suponha que essas partes correspondentes às obras X, Y e Z sejam, respectivamente, x, y e z. Nesse caso:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{9}=k$$

A soma das partes totaliza 360 sacos. Logo, $x+y+z=360$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{9}=k$, temos:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{9}=\frac{x+y+z}{4+7+9}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = \frac{360}{20}$$

$$\boxed{\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = 18}$$

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é:

$$\frac{y}{7} = 18$$

$$y = 18 \times 7$$

$$y = 126$$

Gabarito: Letra D.

5.(FGV/TRT MA/2022) Um terreno de 1280 m² foi dividido em 3 partes, proporcionais aos números: 2, 5/2 e 7/2.

A área da maior parte, em m², é

a) 400.

b) 440.

c) 480.

d) 520.

e) 560.

Comentários:

Devemos dividir 1280 m² em partes diretamente proporcionais a 2, 5/2 e 7/2. Suponha que essas partes sejam, respectivamente, a, b e c. Nesse caso:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = k$$

A soma das partes totaliza 1280 m². Logo, $a + b + c = 1280$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = k$, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{a+b+c}{2+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{\frac{4+5+7}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{\frac{16}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = \frac{1280}{8}$$

$$\boxed{\frac{a}{2} = \frac{b}{\frac{5}{2}} = \frac{c}{\frac{7}{2}} = 160}$$

Como estamos dividindo em partes diretamente proporcionais, a parte de maior área será a parte correspondente a 7/2, pois esse número é o maior entre 2, 5/2 e 7/2. Logo, a parte de maior área é c. Temos:

$$\frac{c}{\frac{7}{2}} = 160$$

$$c = 160 \times \frac{7}{2}$$

$$c = 560 \text{ m}^2$$

Gabarito: Letra E.

6. (FGV/BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Considere que temos N_{10} cédulas de 10 reais, N_{20} cédulas de 20 reais e N_{50} cédulas de 50 reais.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores. Logo:

$$\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}} = k$$

O total de cédulas é 272. Logo, $N_{10} + N_{20} + N_{50} = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}}$, temos:

$$\frac{N_{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{N_{20}}{\frac{1}{20}} = \frac{N_{50}}{\frac{1}{50}} = \frac{N_{10} + N_{20} + N_{50}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = \frac{272}{\frac{10 + 5 + 2}{100}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10N_{10} = 20N_{20} = 50N_{50} = 1600}$$

O número de cédulas de cada tipo é:

$$10N_{10} = 1600 \ \rightarrow N_{10} = \frac{1600}{10} \rightarrow N_{10} = 160$$

$$20N_{20} = 1600 \ \rightarrow N_{20} = \frac{1600}{20} \rightarrow N_{20} = 80$$

$$50N_{50} = 1600 \ \rightarrow N_{50} = \frac{1600}{50} \rightarrow N_{50} = 32$$

A quantidade total de dinheiro armazenado é:

$$10 \times N_{10} + 20 \times N_{20} + 50 \times N_{50}$$

$$= 10 \times 160 + 20 \times 80 + 50 \times 32$$

$$= 1.600 + 1.600 + 1.600$$

$$= R\$\ 4.800$$

Gabarito: Letra E.

Cebraspe

7.(CESPE/IBAMA/2012) Um órgão de controle, ao aplicar sanções contra empresas petroleiras cujas atividades resultem em agressão ao meio ambiente, determina o valor da multa, em reais, de modo proporcional ao volume de petróleo derramado, em barris, ao tempo de duração do derramamento, em semanas, e à área da região afetada, em quilômetros quadrados. Assim, se determinada empresa petroleira deixar vazar, por três semanas, quatro mil barris de petróleo bruto, causando a contaminação de 950 km2 de superfície marítima, será, em decorrência disso, multada em R$ 5.000.000,00. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Caso, depois de estancado um vazamento, o petróleo derramado avance por uma área correspondente a 10% da área inicialmente afetada, o valor da multa recebida pela empresa aumentará 10% em relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque.

Comentários:

O **valor da multa** é diretamente proporcional ao **volume de petróleo** derramado, ao **tempo de duração** do derramamento e à **área da região afetada**. Nesse caso:

$$\frac{(\text{Multa})}{(\text{Volume}) \times (\text{Tempo}) \times (\text{Área})} = k$$

Suponha que inicialmente temos um **valor de multa** M_1 ocasionada por um **volume de petróleo** V_1 com um **tempo de derramamento** t_1 em uma **área** A_1. Caso, **depois de estancado o vazamento**, a área afetada aumente em 10%, temos, em um segundo momento:

- Uma **multa** M_2, que queremos determinar;
- Um **volume de petróleo** $V_2 = V_1$, pois o **derramamento foi estancado**;
- Um **tempo de derramamento** $t_2 = t_1$, pois o **derramamento foi estancado**; e
- Uma área afetada $A_2 = 1{,}1A_1$, pois a área aumentou em 10%.

Nesse caso, temos:

$$\frac{M_1}{V_1 \times t_1 \times A_1} = \frac{M_2}{V_2 \times t_2 \times A_2} = k$$

$$\frac{M_1}{V_1 \times t_1 \times A_1} = \frac{M_2}{V_1 \times t_1 \times 1{,}1A_1}$$

Simplificando V_1, t_1 e A_1, temos:

$$M_1 = \frac{M_2}{1{,}1} \rightarrow M_2 = 1{,}1M_1$$

Logo, o **novo valor de multa (M_2) aumentará em 10%** com relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque (M_1)

Gabarito: CERTO.

8.(CESPE/CAGE RS/2018) João, Pedro e Tiago, três investidores amadores, animados com a popularização das criptomoedas, investiram 12, 14 e 24 mil reais, respectivamente, em moeda virtual. Após uma semana do investimento, eles perceberam que o prejuízo acumulado, que era de 8 mil reais, deveria ser dividido entre os três, em proporção direta aos valores investidos.

Nessa situação, em caso de desistência do investimento após a constatação do prejuízo, João, Pedro e Tiago receberão, respectivamente, as quantias, em reais, de

a) 9.340, 11.340 e 21.340.

b) 10.080, 11.760 e 20.160.

c) 11.920, 13.240 e 22.840.

d) 2.660, 2.660 e 2.660.

e) 1.920, 2.240 e 3.840.

Comentários:

Suponha que o prejuízo absorvido é j para João, p para Pedro e t para Tiago.

Como o prejuízo foi dividido em partes diretamente proporcionais ao capital investido por João, Pedro e Tiago, temos:

$$\frac{j}{12.000}=\frac{p}{14.000}=\frac{t}{24.000}=k$$

A soma dos prejuízos é R$ 8.000. Logo, $j+p+t=8.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{j}{12.000}=\frac{p}{14.000}=\frac{t}{24.000}$, temos:

$$\frac{j}{12.000}=\frac{p}{14.000}=\frac{t}{24.000}=\frac{j+p+t}{12.000+14.000+24.000}$$

$$\frac{j}{12.000}=\frac{p}{14.000}=\frac{t}{24.000}=\frac{8.000}{50.000}$$

$$\boxed{\frac{j}{12.000}=\frac{p}{14.000}=\frac{t}{24.000}=\frac{4}{25}}$$

Logo, os prejuízos absorvidos por João, Pedro e Tiago são:

$$\frac{j}{12.000}=\frac{4}{25}\rightarrow j=\frac{4\times 12.000}{25}\rightarrow j=1.920$$

$$\frac{p}{14.000}=\frac{4}{25}\rightarrow p=\frac{4\times 14.000}{25}\rightarrow p=2.240$$

$$\frac{t}{24.000}=\frac{4}{25}\rightarrow t=\frac{4\times 24.000}{25}\rightarrow t=3.840$$

Observe que a questão pergunta o valor dos investimentos após a constatação dos prejuízos. Temos:

- **João**: $12.000 - 1.920 = 10.080$;
- **Pedro:** $14.000 - 2.240 = 11.760$;
- **Tiago:** $24.000 - 3.840 = 20.160$.

O **gabarito**, portanto, é a **letra B**: **10.080**, **11.760** e **20.160**.

Gabarito: Letra B.

9.(CESPE/IFF/2018) A quantia de R$ 360.000 deverá ser repassada às escolas A, B e C para complemento da merenda escolar. A distribuição será em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola. Sabe-se que a escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B e que a escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B. Nesse caso, a escola A deverá receber

a) R$ 140.000.

b) R$ 144.000.

c) R$ 168.000.

d) R$ 192.000.

e) R$ 216.000.

Comentários:

Suponha que os valores recebidos pelas escolas A, B e C são, respectivamente, a, b e c.

Considerando que a escola B tem **x alunos**, temos que:

- A escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B: $1{,}2\ x$ alunos.
- A escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B: $0{,}8x$ alunos.

Como o valor total foi dividido em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola, temos:

$$\frac{a}{1{,}2x} = \frac{b}{x} = \frac{c}{0{,}8x} = k$$

Podemos simplificar o valor x das proporções em $\frac{a}{1{,}2x} = \frac{b}{x} = \frac{c}{0{,}8x}$. Ficamos com:

$$\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8}$$

A soma dos valores recebidos pelas escolas é R$ 360.000. Logo, $a + b + c = 360.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1,2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0,8}$, temos:

$$\frac{a}{1,2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0,8}=\frac{a+b+c}{1,2+1+0,8}$$

$$\frac{a}{1,2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0,8}=\frac{360.000}{3}$$

$$\boxed{\frac{a}{1,2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0,8}=120.000}$$

O valor recebido pela escola A (a) é:

$$\frac{a}{1,2}=120.000$$

$$a=R\$\,144.000$$

Gabarito: Letra B.

10.(CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um empresário dividiu, entre três de seus empregados, a quantia de R$ 6.600,00 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

Nesse caso, todos os valores nessa partilha são maiores que R$ 1.100,00.

Comentários:

Suponha que o dinheiro será repartido nas partes a, b e c de modo inversamente proporcional a, respectivamente, 2, 5 e 8. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{8}}=k$$

Sabemos que a soma das partes totaliza R$ 6.600. Logo, $a+b+c=6.600$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{8}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{5}}=\frac{c}{\frac{1}{8}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = \frac{6.600}{\frac{20+8+5}{40}}$$

$$2a = 5b = 8c = \frac{6.600}{\frac{33}{40}}$$

$$2a = 5b = 8c = \frac{6600}{33} \times 40$$

$$\boxed{2a = 5b = 8c = 8.000}$$

O menor valor recebido será c, pois este valor é inversamente proporcional ao maior número apresentado. Temos que:

$$8c = 8.000$$

$$c = R\$\ 1.000$$

Gabarito: ERRADO.

11.(CESPE/FUB/2018) A respeito de razões, proporções e inequações, julgue o item seguinte.

Situação hipotética: Vanda, Sandra e Maura receberam R$ 7.900 do gerente do departamento onde trabalham, para ser divido entre elas, de forma inversamente proporcional a 1/6, 2/9 e 3/8, respectivamente.

Assertiva: Nessa situação, Sandra deverá receber menos de R$ 2.500.

Comentários:

Suponha **Vanda**, **Sandra** e **Maura** receberão, respectivamente, $\boldsymbol{v}$**,** $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{m}$. Essas partes em que a quantia total é repartida são inversamente proporcionais a, respectivamente, **1/6, 2/9 e 3/8**. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{v}{\frac{1}{1/6}} = \frac{s}{\frac{1}{2/9}} = \frac{m}{\frac{1}{3/8}} = k$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = k$$

Sabemos que a soma das partes totaliza R$ 7.900. Logo, $v + s + m = 7.900$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}}$, temos:

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=\frac{v+s+m}{6+\frac{9}{2}+\frac{8}{3}}$$

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=\frac{7.900}{\frac{36+27+16}{6}}$$

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=\frac{7.900}{\frac{36+27+16}{6}}$$

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=\frac{7.900}{\frac{79}{6}}$$

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=\frac{7.900}{79}\times 6$$

$$\frac{v}{6}=\frac{s}{\frac{9}{2}}=\frac{m}{\frac{8}{3}}=600$$

O valor que **Sandra** receberá é:

$$\frac{s}{\frac{9}{2}}=600$$

$$s=600\times\frac{9}{2}$$

$$s=R\$\ 2.700$$

Gabarito: ERRADO.

FCC

12.(FCC/TRT 22/2022) Alberto tem 25 anos, Breno 40 anos e Carlos 35 anos. Os três trabalham como garçons em um restaurante e decidiram dividir entre eles o valor total das gorjetas. Alberto, que trabalha no restaurante há apenas 5 meses, propôs dividir o total das gorjetas proporcionalmente à idade de cada um, mas Carlos, que trabalha há 1 ano e 3 meses, discorda e propõe que a divisão seja proporcional ao tempo de serviço de cada um no restaurante. Breno, com 1 ano e 8 meses no restaurante foi convidado a desempatar e decidiu que o valor total fosse dividido proporcionalmente ao

tempo de serviço. Com um valor total de gorjetas de R$ 1.200,00 e considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais,

a) 100,00.

b) 250,00.

c) 30,00.

d) 150,00.

e) 300,00.

Comentários:

Segundo o enunciado:

- Alberto tem **25 anos** e **5 meses** de serviço;
- Breno tem **40 anos** e 1×12+8 = **20 meses** de serviço;
- Carlos tem **35 anos** e 1×12+3= **15 meses** de serviço.

Além disso, sabemos que o **total de gorjetas** a ser dividido é **R$ 1.2000,00**.

–

Primeiramente, vamos obter o valor que Alberto ganharia caso a divisão fosse feita em **partes diretamente proporcionais à idade**.

Suponha que os valores recebidos por Alberto, Breno e Carlos sejam, respectivamente, a_1, b_1 e c_1. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais às idades 25, 40, 35, temos:

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = k$$

A soma das partes totaliza 1.200 reais. Logo, $a_1 + b_1 + c_1 = 1.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35}$, temos:

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{25 + 40 + 35}$$

$$\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = \frac{1.200}{100}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{25} = \frac{b_1}{40} = \frac{c_1}{35} = 12}$$

Logo, se a divisão fosse feita em partes diretamente proporcionais à idade, Alberto receberia a seguinte quantia:

$$\frac{a_1}{25} = 12$$

$$a_1 = \text{R\$ } 300{,}00$$

—

Nesse momento, vamos obter o valor que Alberto ganharia caso a divisão fosse feita em **partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço**.

Suponha que os valores recebidos por Alberto, Breno e Carlos sejam, respectivamente, a_2, b_2 e c_2. Nesse caso, sendo a divisão feita em partes diretamente proporcionais aos tempos em meses 5, 20, 15, temos:

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = k$$

A soma das partes totaliza 1.200 reais. Logo, $a_2 + b_2 + c_2 = 1.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15}$, temos:

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{5 + 20 + 15}$$

$$\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = \frac{1200}{40}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{5} = \frac{b_2}{20} = \frac{c_2}{15} = 30}$$

Logo, se a divisão fosse feita em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço, Alberto receberia a seguinte quantia:

$$\frac{a_2}{5} = 30$$

$$a_2 = \text{R\$ } 150{,}00$$

—

Considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais, a seguinte quantia:

$$a_1 - a_2 = 300 - 150$$

$$= R\$\ 150{,}00$$

Gabarito: Letra D.

13. (FCC/TRT 23/2022) Em um processo de partilha de herança entre Ana, Beatriz e Clara, ficou decidido que os valores recebidos serão diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Sabe-se que Ana tem o triplo da idade de Clara que, por sua vez, tem a metade da idade de Beatriz. Clara receberá 100 mil reais.

O valor total da herança é de:

a) R$ 700.000,00

b) R$ 400.000,00

c) R$ 600.000,00

d) R$ 900.000,00

e) R$ 500.000,00

Comentários:

Suponha que **Clara** tenha $\boldsymbol{x}$ **anos**. Nesse caso, como Clara tem a metade da idade de Beatriz, temos que Beatriz tem o dobro da idade da Clara. Logo, **Beatriz** tem $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$ **anos**. Além disso, como Ana tem o triplo da idade de Clara, **Ana** tem $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ **anos**.

Agora que temos uma relação entre as idades de Ana, Clara e Beatriz, devemos descrever a divisão em partes proporcionais às idades.

Suponha que os valores recebidos por **Ana**, **Beatriz** e **Clara** sejam, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Como a quantia total da herança foi repartida em partes diretamente proporcionais às idades $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}$, temos:

$$\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = k$$

Queremos obter o total da herança (H), que corresponde à soma das partes: $H = a + b + c$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x}$, temos:

$$\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = \frac{a+b+c}{3x+2x+x}$$

$$\boxed{\frac{a}{3x} = \frac{b}{2x} = \frac{c}{x} = \frac{H}{6x}}$$

Como Clara receberá 100 mil reais, temos que $c = R\$\ 100.000{,}00$. Logo:

$$\frac{c}{x} = \frac{H}{6x}$$

Simplificando o x, temos:

$$c = \frac{H}{6}$$

$$100.000 = \frac{H}{6}$$

$$H = R\$\ 600.000{,}00$$

Portanto, o valor total da herança é de R$ 600.000,00.

Gabarito: Letra C.

14.(FCC/Pref. Recife/2019) Sabe-se que as sequências S_1 e S_2 abaixo são diretamente proporcionais $(x > 0)$, isto é, a razão entre os elementos correspondentes das duas sequências é constante:

Sequência S_1: $\{4, x, 16, \ldots\}$

Sequência S_2: $\{x, 9, y, \ldots\}$

O valor de y é igual a

a) 15.

b) 9.

c) 12.

d) 6.

e) 24.

Comentários:

Se as duas sequências S_1 e S_2 são proporcionais, então:

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} = \frac{16}{y} = k$$

Ao realizar a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$, obtemos:

$$x \times x = 4 \times 9$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Como $x > 0$, temos apenas a possibilidade positiva para x. Portanto, $\boldsymbol{x = 6}$.

Ao realizar a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{4}{x} = \frac{16}{y}$, obtemos:

$$\frac{4}{6} = \frac{16}{y}$$

$$4 \times y = 16 \times 6$$

$$y = \frac{16 \times 6}{4}$$

$$y = 24$$

Gabarito: Letra E.

15.(FCC/TRF 3/2016) Uma herança de R$ 82.000,00 será repartida de modo inversamente proporcional às idades, em anos completos, dos três herdeiros. As idades dos herdeiros são: 2, 3 e x anos. Sabe-se que os números que correspondem às idades dos herdeiros são números primos entre si (o maior divisor comum dos três números é o número 1) e que foi R$ 42.000,00 a parte da herança que o herdeiro com 2 anos recebeu. A partir dessas informações o valor de x é igual a

a) 7.

b) 5.

c) 11.

d) 1.

e) 13.

Comentários:

A herança será dividida em partes inversamente proporcionais às idades.

Se as partes que os herdeiros de 2, 3 e x anos receberam foram respectivamente 42.000, b e c, então:

$$\frac{42.000}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{x}} = k$$

Note, portanto, que a constante de proporcionalidade é $k = \frac{42.000}{1/2} = 84.000$. Podemos agora determinar b.

$$\frac{b}{\frac{1}{3}} = k$$

$$3b = 84.000$$

$$b = \frac{84.000}{3}$$

$$b = 28.000$$

O total da herança é dado pela soma das partes:

$$42.000 + b + c = 82.000$$

$$42.000 + 28.000 + c = 82.000$$

$$c = 82.000 - 42.000 - 28.000$$

$$c = 12.000$$

Com o valor de c, podemos determinar x:

$$\frac{c}{\frac{1}{x}} = k$$

$$12.000 \times x = 84.000$$

$$x = \frac{84.000}{12.000} = 7$$

Gabarito: Letra A.

16.(FCC/CL DF/2018) Miguel, Otávio e Pedro foram convocados para realizar um trabalho emergencial. Para recompensá-los posteriormente, decide-se dividir uma quantia em reais entre os 3 em partes diretamente proporcionais ao tempo dedicado de cada um para realizar o trabalho e inversamente proporcionais às respectivas idades. Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos. Se a menor parte correspondente a esta divisão foi de R$ 4.800,00, então a maior parte foi igual a

a) R$ 9.000,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 12.000,00.

d) R$ 8.400,00.

e) R$ 7.200,00.

Comentários:

A quantia foi dividida em partes <u>diretamente proporcionais</u> aos tempos dedicados e <u>inversamente proporcionais</u> às idades.

Considere que as partes recebidas por Miguel, Otávio e Pedro são, respectivamente, m, o e p.

"Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos." Logo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{m}{4 \times \frac{1}{30}} = \frac{o}{8 \times \frac{1}{40}} = \frac{p}{15 \times \frac{1}{60}} = k$$

$$\boxed{\frac{m}{\frac{2}{15}} = \frac{o}{\frac{1}{5}} = \frac{p}{\frac{1}{4}} = k}$$

Para determinar a quem corresponde a menor parte da divisão, dada por R$ 4.800, devemos determinar qual dos números é o menor:

$$\frac{2}{15}; \frac{1}{5} \text{ ou } \frac{1}{4}$$

Essas frações correspondem, respectivamente, a:

$$0{,}1333\ldots;\ 0{,}2 \text{ e } 0{,}25$$

Logo:

$$\frac{2}{15} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Isso significa que $\frac{2}{15}$ é menor e, portanto, a menor quantia foi recebida por Miguel (m). Portanto:

$$m = 4.800$$

A proporção fica assim:

$$\frac{4.800}{\frac{2}{15}} = \frac{o}{\frac{1}{5}} = \frac{p}{\frac{1}{4}} = k$$

A questão pergunta qual a maior parte correspondente à divisão. Trata-se de p, pois $\frac{1}{4}$ é a maior das frações.

$$\frac{p}{\frac{1}{4}} = \frac{4.800}{\frac{2}{15}}$$

$$4p = 36.000$$

$$p = 9.000$$

Gabarito: Letra A.

Vunesp

17.(VUNESP/SEMAE Piracicaba/2019) Três amigos fizeram uma aposta em conjunto em certa loteria. As respectivas participações no valor total da aposta foram diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 6. Se o valor total da aposta foi R$ 330,00, então o amigo que teve a menor participação nesse valor contribuiu com

a) R$ 80,00.

b) R$ 70,00.

c) R$ 60,00.

d) R$ 50,00.

e) R$ 40,00.

Comentários:

O valor total da aposta foi dividido proporcionalmente a 2, 3 e 6. Se as partes proporcionais a 2, 3 e 6 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = k$$

A soma das partes é 330. Logo, $a + b + c = 330$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{a + b + c}{2 + 3 + 6}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{330}{11}$$

$$\boxed{\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = 30}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 30. O amigo que teve a menor participação foi aquele que contribuiu com o valor proporcional a 2:

$$\frac{a}{2} = 30 \ \rightarrow a = 30$$

Logo, a menor participação foi de R$ 30,00.

Gabarito: Letra C.

18.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três amigos dividiram 920 figurinhas em partes inversamente proporcionais às suas idades. Um amigo recebeu 360 figurinhas e outro 240. Se o mais velho desses amigos tem 12 anos, a soma das idades desses três amigos, em anos, é

a) 25.

b) 23.

c) 29.

d) 27.

e) 31.

Comentários:

Temos um total de 920 figurinhas. Sabemos que um amigo recebeu **360 figurinhas** e outro **240**. Portanto, o amigo que resta recebeu:

$$920 - 360 - 240 = \mathbf{320}\ \text{figurinhas}$$

Note que **o mais velho** tem **12 anos**. Como a divisão das figurinhas é de modo **inversamente proporcional** às idades, **o mais velho receberá a menor quantia**. Portanto, o mais velho receberá **240 figurinhas**.

Considere que quem recebeu **320 figurinhas** tenha uma **idade a** e quem recebeu **360 figurinhas** tenha uma **idade b**. Como a divisão é inversamente proporcional às idades, temos a seguinte proporção:

$$\frac{320}{\frac{1}{a}} = \frac{360}{\frac{1}{b}} = \frac{240}{\frac{1}{12}}$$

$$320a = 360b = 2880$$

Portanto:

$$320a = 2880 \ \rightarrow a = 9$$

$$360b = 2880 \rightarrow b = 8$$

Logo, a soma das idades é:

$$a + b + 12$$

$$= 9 + 8 + 12$$

$$= 29$$

Gabarito: Letra C.

19.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três máquinas X, Y e Z produziram 2 640 peças de certo jogo, cada peça produzida sempre em um mesmo tempo. A máquina X produziu 820 peças, tendo funcionado por 1 hora e 30 minutos a menos do que a máquina Y. A máquina Z funcionou por 6 horas e 50 minutos e produziu um total de peças igual a

a) 800.

b) 820.

c) 840.

d) 860.

e) 880.

Comentários:

Como cada peça é produzida sempre em um mesmo tempo, as máquinas produzem uma quantidade de peças de modo **diretamente proporcional** ao tempo de funcionamento.

Considere que a **máquina Y** funcionou por um **tempo t, em minutos**. Temos que:

- A **máquina X** produziu **820 peças** funcionando por **$t - 90$ minutos** (1he 30min a menos do que a máquina Y);
- A **máquina Y** produziu **y peças** funcionando por um **tempo t em minutos**.
- A **máquina Z** produziu **z peças** funcionando por **410 minutos** (6h e 50min).

Logo, a proporção é dada por:

$$\frac{820}{t-90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = k$$

Sabemos que o total de peças é 2.640. Logo:

$$820 + y + z = 2640$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{820}{t-90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410}$, temos:

$$\frac{820}{t-90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = \frac{820 + y + z}{(t-90) + t + 410}$$

$$\boxed{\frac{820}{t-90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = \frac{2640}{2t + 320}}$$

A partir dessa proporção, podemos encontrar o valor de t:

$$\frac{820}{t-90}=\frac{2640}{2t+320}$$

$$2640\times(t-90)=820\times(2t+320)$$

$$2640t-237.600=1640t+262.400$$

$$2640t-1640t=262.400+237.600$$

$$1000t=500.000$$

$$\boldsymbol{t=500}$$

Agora que temos o valor de t, podemos obter a quantidade produzida pela máquina z. Da proporção obtida, temos que:

$$\frac{820}{t-90}=\frac{z}{410}$$

$$\frac{820}{500-90}=\frac{z}{410}$$

$$\frac{820}{410}=\frac{z}{410}$$

$$z=820$$

Logo, a máquina Z produziu um total de peças igual a 820.

Gabarito: Letra B.

20.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Duas determinadas grandezas x e y podem assumir valores estritamente positivos. A relação de interdependência entre elas pode ser expressa pela sentença $\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x}$

Nesse caso, é correto afirmar que

a) y não é direta nem inversamente proporcional a x.

b) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.

c) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 1/3.

d) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.

e) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 1/3.

Comentários:

Vimos na teoria que uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

Como $y = \frac{1}{3}x$, temos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

Isso significa que y **é diretamente proporcional** a x e a razão entre y e x é a **constante de proporcionalidade**, dada por **1/3**.

Gabarito: Letra E.

Outras Bancas

21.(CESGRANRIO/BB/2015) Aldo, Baldo e Caldo resolvem fazer um bolão para um concurso da Mega-Sena. Aldo contribui com 12 bilhetes, Baldo, com 15 bilhetes e Caldo, com 9 bilhetes. Eles combinaram que, se um dos bilhetes do bolão fosse sorteado, o prêmio seria dividido entre os três proporcionalmente à quantidade de bilhetes com que cada um contribuiu. Caldo também fez uma aposta fora do bolão e, na data do sorteio, houve 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da aposta individual de Caldo, e o outro, um dos bilhetes do bolão.

Qual a razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu?

a) 0,8

b) 1,5

c) 2

d) 2,5

e) 3

Comentários:

Considere que o **prêmio total** é $\boldsymbol{P}$. O valor total é dividido entre 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da **aposta individual de Caldo** e o outro um dos bilhetes do **bolão**.

Observe, portanto, que **Caldo**, antes mesmo de obter a sua quantia relativa ao bolão, obteve $\frac{P}{2}$.

A outra metade do prêmio total deve ser repartido entre Aldo, Baldo e Caldo em partes proporcionais a 12, 15 e 9. Sejam essas partes, respectivamente, a, b e c. Nesse caso, temos:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{9} = k$$

A soma das partes obtidas com o bolão corresponde à **metade** do **prêmio total**. Logo, $a+b+c=\frac{P}{2}$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{9}$, temos:

$$\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{9}=\frac{a+b+c}{12+15+9}$$

$$\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{9}=\frac{\frac{P}{2}}{36}$$

$$\boxed{\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{9}=\frac{P}{72}}$$

Temos que:

$$\frac{b}{15}=\frac{P}{72}\rightarrow b=\frac{P}{72}\times 15\rightarrow b=\frac{5}{24}P$$

$$\frac{c}{9}=\frac{P}{72}\rightarrow c=\frac{P}{72}\times 9\rightarrow c=\frac{1}{8}P$$

Note, portanto, que **Baldo recebeu $b=\frac{5}{24}P$**. Por outro lado, Caldo recebeu não só a parte c do bolão, mas também a metade do prêmio que não foi contabilizada no bolão. Logo, **Caldo recebeu**:

$$\frac{P}{2}+c=\frac{P}{2}+\frac{P}{8}=\frac{4P+P}{8}=\boldsymbol{\frac{5}{8}P}$$

A razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu é:

$$\frac{\frac{5}{8}P}{\frac{5}{24}P}=\frac{5}{8}\times\frac{24}{5}=3$$

Gabarito: Letra E.

22.(CESGRANRIO/BASA/2015) Em uma empresa, o total de descontos que incidem sobre o salário bruto de cada funcionário é proporcional ao valor desse mesmo salário bruto. Um funcionário F_1 tem salário líquido igual a S_1, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_1 reais. Um funcionário F_2 tem salário líquido igual a S_2, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_2 reais.

O total de descontos x_2 é tal que

a) $x_2=\frac{S_1+x_1}{S_2+x_2}\cdot x_1$.

b) $x_2=\frac{S_2+x_2}{S_1+x_1}.(x_1+x_2)$.

c) $x_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot x_1$.

d) $x_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot x_1$.

e) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \,.(x_1 + x_2)$.

Comentários:

O **total de descontos** é **diretamente proporcional** ao valor do **salário bruto**. Logo:

$$\frac{\text{descontos}}{\text{salário bruto}} = k$$

Note que o **salário bruto** corresponde ao **salário líquido** **somado** aos **descontos**.

- Para o funcionário F_1, temos o desconto x_1 e o **salário bruto** $\boldsymbol{S_1 + x_1}$;
- Para o funcionário F_2, temos o desconto x_2 e o **salário bruto** $\boldsymbol{S_2 + x_2}$.

Logo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{x_1}{S_1 + x_1} = \frac{x_2}{S_2 + x_2} = k$$

A partir da primeira igualdade, temos:

$$\frac{x_2}{S_2 + x_2} = \frac{x_1}{S_1 + x_1}$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**", temos:

$$x_2 \times (S_1 + x_1) = x_1 \times (S_2 + x_2)$$

$$S_1x_2 + x_1x_2 = S_2x_1 + x_1x_2$$

$$S_1x_2 = S_2x_1$$

$$x_2 = \frac{S_2}{S_1}x_1$$

Gabarito: Letra D.

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Frações

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022)

$$a = \frac{5}{6}, b = \frac{7}{9}, c = \frac{13}{18}$$

Colocando essas frações em ordem crescente a sequência correta é

a) $a < b < c$.

b) $b < a < c$.

c) $b < c < a$.

d) $c < a < b$.

e) $c < b < a$.

2.(FGV/PM SP/2022) Considere os produtos:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2022}\right)$$

$$D = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2022}\right)$$

O produto SD é igual a

a) 2023/2022.

b) 2023/4044.

c) 2022/2023.

d) 4044/2023.

e) 1.

3.(FGV/CBM-RJ/2022) João recebeu certa quantia. Com a terça parte da quantia, pagou os gastos com o cartão de crédito, e pagou o aluguel com a quinta parte do restante.

Da quantia recebida, a fração que representa a parte que João ainda tem disponível é

a) 2/5

b) 3/5

c) 7/15

d) 8/15

e) 17/30

4.(FGV/CM Taubaté/2022) Marlene gasta 1/4 do seu salário com aluguel e, do que sobra, ela gasta 1/3 com alimentação. Após pagar o aluguel e a alimentação, a fração do salário de Marlene que sobra para as outras despesas é:

a) 5/7.

b) 5/12.

c) 1/2.

d) 2/7.

e) 2/5.

5.(FGV/PM SP/2022) Em uma caixa há várias bolas, cada uma de uma cor. As cores das bolas são: vermelho, azul, verde e rosa. Há, pelo menos, uma bola de cada cor.

Um terço das bolas são vermelhas, um quinto são azuis e 10 bolas são verdes.

O número mínimo de bolas rosas na caixa é

a) 1.

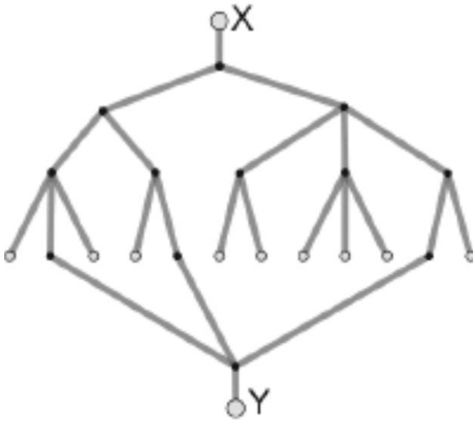
b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

6.(FGV/SEFAZ ES/2022) A figura a seguir mostra uma rede de canos de água em um plano vertical. Qualquer quantidade de água colocada na abertura X desce e divide-se em partes iguais em cada um dos pontos de divisão. Os pontos brancos no final de cada percurso são saídas.



A fração da quantidade de água que, colocada em X, sai por Y é

a) 1/3.

b) 3/8.

c) 5/12.

d) 5/24.

e) 7/24.

7. (FGV/PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Cebraspe

8.(CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Entre os três servidores, Maria é a mais eficiente, isto é, em cada dia de trabalho, ela cataloga mais livros que cada um dos outros dois.

9.(CESPE/TCE-RS/2013) Na secretaria de um órgão público, as páginas dos processos, para serem digitalizadas, são separadas e distribuídas entre 7 servidores — 4 servidores recém-contratados e 3 servidores antigos. Julgue o item a seguir, a respeito dessa situação.

Considere que, com a aquisição de novos equipamentos, o tempo para se digitalizar uma página, que era de 22 segundos, passou a ser de [22 – 22 × P] segundos, em que P correspondente à dízima periódica 0,27272727.... Nessa situação, com os novos equipamentos, a digitalização de uma página passou a ser feita em 16 segundos.

10.(CESPE/TJ PA/2020) Dois colaboradores do setor de informática de uma empresa são responsáveis por fazer a manutenção dos computadores da empresa. Durante certo período de tempo, um dos colaboradores fez manutenção em $0,\overline{26} = 0,262626$ da quantidade total de computadores da empresa e, nesse mesmo período de tempo, o outro colaborador fez manutenção em $0,\overline{18} = 0,181818$ dessa quantidade total de computadores, tendo restado 110 computadores sem manutenção.

Nessa situação, a quantidade total de computadores dessa empresa é igual a

a) 130.

b) 139.

c) 155.

d) 159.

e) 198.

11.(CESPE/Pref. B dos Coqueiros/2020) Em seu testamento, um pai deixou o diagrama mostrado a seguir, para ilustrar como deverá ocorrer a distribuição de sua herança, no valor de 2,7 milhões de reais, entre seus cinco herdeiros.

Com base nas informações precedentes, e considerando-se que, em cada linha desse diagrama, o retângulo branco mostrado está dividido em partes iguais, é correto concluir que

a) o quarto filho receberá mais de 420 mil reais.

b) a mãe e o terceiro filho receberão, juntos, um total de 1,3 milhão de reais.

c) a mãe e o primeiro filho receberão, juntos, menos de 1,4 milhão de reais.

d) os quatro filhos receberão, juntos, 2 milhões de reais.

e) a mãe e o quarto filho receberão, juntos, exatamente o mesmo total recebido pelos outros três filhos.

12.(CESPE/TC-DF/2014) Em uma empresa, as férias de cada um dos 50 empregados podem ser marcadas na forma de trinta dias ininterruptos, ou os trinta dias podem ser fracionados em dois períodos de quinze dias ininterruptos ou, ainda, em três períodos de dez dias ininterruptos. Em 2013, depois de marcadas as férias de todos os 50 empregados, constatou-se que 23, 20 e 28 deles marcaram os trinta dias de férias ou parte deles para os meses de janeiro, fevereiro e junho, respectivamente. Constatou-se, também, que, nesse ano, nenhum empregado marcou férias para algum mês diferente dos mencionados.

Tendo como referência as informações acima, julgue o item que se segue.

Suponha que, em 2013, mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino e mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino. Nessa situação, é correto afirmar que, em 2013, havia na empresa no máximo 12 mulheres a mais que homens.

FCC

13.(FCC/TRT 9/2022) O valor da soma $\frac{1}{2022^{-2}+1}+\frac{1}{2022^{-1}+1}+\frac{1}{2022^{0}+1}+\frac{1}{2022^{1}+1}+\frac{1}{2022^{2}+1}$ é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{9}{2}$

14. (FCC/TRT 4/2022) Um terreno foi dividido entre quatro irmãos, Ana, Bento, Carla e Daniel. Ana ficou com metade do terreno; Bento ficou com um terço do terreno; Carla ficou com um sétimo do terreno e Daniel ficou com 500 m^2. A área total do terreno, antes da divisão, era de:

a) 21.000 m^2

b) 20.000 m^2

c) 25.000 m^2

d) 18.000 m^2

e) 15.000 m^2

15. (FCC/TRT 9/2022) Em relação às frações $\frac{7}{15}, \frac{8}{21}, \frac{2}{5}$ tem-se que

a) $\frac{8}{21} < \frac{7}{15} < \frac{2}{5}$.

b) $\frac{2}{5} < \frac{8}{21} < \frac{7}{15}$.

c) $\frac{8}{21} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{15} < \frac{2}{5} < \frac{8}{21}$.

e) $\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{8}{21}$.

16. (FCC/TRT 23/2022) Em uma fábrica de produção de robôs, registrou-se o número total de robôs produzidos em 3 anos. No primeiro ano foram produzidos 2/5 do total, no segundo ano foram produzidos 1/3 do total e no terceiro ano foram produzidos 8 robôs.

O número de robôs produzidos no primeiro ano foi

a) 8

b) 10

c) 12

d) 9

e) 6

17. (FCC/TRT 22/2022) Uma empresa de construção possui 48 funcionários divididos igualmente em 4 setores. No setor da Engenharia, 2/3 são formados em Engenharia Civil sendo metade desses mulheres. No setor de Contabilidade todos os funcionários são homens, no setor de Administração 1/4 dos funcionários são mulheres e, finalmente, no setor de Arquitetura, metade são mulheres. No máximo, o número de mulheres dentre os 48 funcionários é

a) 31.

b) 17.

c) 25.

d) 13.

e) 12.

18.(FCC/TJ CE/2022) Uma pesquisa em uma universidade verificou que cada estudante utiliza-se de apenas um meio de transporte para se deslocar até lá. A pesquisa também mostrou que três quartos de seus estudantes vão de ônibus, um décimo vai de carro, um oitavo vai de bicicleta e os 200 estudantes restantes vão a pé. O número de estudantes entrevistados é igual a

a) 24000.

b) 16000.

c) 20000.

d) 8000.

e) 6000.

19.(FCC/TRT 24/2017) Francisco verificou que havia x pastas em um diretório. Ele abriu $\frac{1}{3}$ dessas pastas, deixou as restantes fechadas e foi embora. Geraldo encontra as pastas como Francisco havia deixado, abre $\frac{5}{7}$ das pastas que ainda estavam fechadas e foi embora. Humberto observa a situação das pastas após a intervenção de Geraldo, fecha $\frac{7}{34}$ das pastas que encontrou abertas e abre metade das pastas que encontrou fechadas. Após a intervenção de Humberto, a fração, das x pastas, que ficaram abertas é igual a

a) $\frac{31}{42}$

b) $\frac{5}{34}$

c) $\frac{13}{21}$

d) $\frac{15}{34}$

e) $\frac{9}{21}$

Vunesp

20.(VUNESP/AVAREPREV/2020) João gasta $\frac{3}{4}$ do seu salário em alimentação e aluguel e economiza $\frac{1}{3}$ do restante. A fração que indica o quanto João economiza do seu salário é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{12}$

21. (VUNESP/CODEN/2021) Das pessoas de uma comunidade que participaram de uma pesquisa, apenas $\frac{3}{8}$ concluíram o ensino médio. Entre as pessoas que não concluíram o ensino médio, somente $\frac{1}{4}$ concluiu o ensino fundamental, o que corresponde a 180 pessoas. O número total de pessoas entrevistadas foi

a) 750 pessoas.

b) 875 pessoas.

c) 1 152 pessoas.

d) 1 248 pessoas.

e) 1 450 pessoas.

22. (VUNESP/CODEN/2021) Um comércio tem 4 atendentes e, em determinado dia, foi realizada certa quantidade de vendas, das quais, Maria realizou um quinto dessa quantidade, Renato realizou um terço dessa quantidade, Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato, e Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas. O número de vendas realizadas por Renato foi

a) 18.

b) 15.

c) 12.

d) 9.

e) 6.

23.(VUNESP/Pref. Cananéia/2020) Do número total de questões de uma prova de certo concurso, Isa acertou $\frac{5}{6}$ e Ana acertou $\frac{3}{5}$. Se Isa acertou 14 questões a mais que Ana, então o número de questões que Ana acertou é

a) 50.

b) 46.

c) 40.

d) 36.

e) 30.

24.(VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) Para uma atividade recreativa, os alunos tinham que levar palitos de sorvete. Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos, sendo que o número de palitos levados por Ana era igual a $\frac{4}{5}$ do número de palitos levados por Bia. O número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

e) 16.

25. (VUNESP/Pref. Cerquilho/2019) Em uma empresa, apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo. Além disso, da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo, o que corresponde a 40 funcionários. O número de funcionários que concluíram o ensino superior é igual a

a) 10.

b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

Outras Bancas

26.(CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Colocar uma barra sobre o período é uma das formas de representar uma dízima periódica: $0,\overline{3} = 0,333$ ... A expressão $0,\overline{4} + 0,1\overline{6}$ é igual a:

a) $\frac{51}{100}$

b) $\frac{511}{1000}$

c) $\frac{11}{18}$

d) $\frac{14}{15}$

e) $\frac{5}{9}$

27. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Baldo usa uma calculadora que ignora todos os valores após a primeira casa decimal no resultado de cada operação realizada. Desse modo, quando Baldo faz $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$, a calculadora mostra o resultado de 1,3 × 1,2 = 1,5. Portanto, há um erro no valor final de 0,1, pois $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{15} = 1,6$.

Qual o erro da calculadora de Baldo para a expressão $\left(\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right)\right) \times 9$

a) 0

b) 1,3

c) 1,5

d) 2,8

e) 3,3

28. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS/2018) Numa cidade, 4 em cada 15 pessoas são estrangeiras. Dessas pessoas estrangeiras, 3 em cada 8, são crianças.

Nessa cidade, as pessoas que NÃO são crianças estrangeiras correspondem a que fração da população?

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{16}{23}$

d) $\frac{14}{45}$

e) $\frac{43}{120}$

Gabarito – Multibancas

Frações

1. LETRA E
2. LETRA B
3. LETRA D
4. LETRA C
5. LETRA D
6. LETRA E
7. LETRA D
8. ERRADO
9. CERTO
10. LETRA E
11. LETRA B
12. CERTO
13. LETRA B
14. LETRA A
15. LETRA C
16. LETRA C
17. LETRA B
18. LETRA D
19. LETRA A
20. LETRA C
21. LETRA C
22. LETRA B
23. LETRA D
24. LETRA C
25. LETRA C
26. LETRA C
27. LETRA D
28. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Razão e proporção

FGV

1.(FGV/TRT-PB/2022) Sobre 4 grandezas X, Y, Z e W sabe-se que:

A razão de W para X é 4:3

A razão de Y para Z é 3:2

A razão de Z para X é 1:6

A razão de X+Y para Z+W é

a) 5:6

b) 4:7

c) 3:5

d) 6:11

e) 8:11

2.(FGV/TRT-PB/2022) Em uma reunião de condomínio, há jovens com até 21 anos, adultos com mais de 21 e menos de 60 anos, e idosos com 60 anos ou mais. Para cada 2 jovens há 5 adultos e para cada 7 adultos há 3 idosos.

A razão entre o número de jovens e o número total de pessoas presentes a essa reunião é

a) 2/15.

b) 7/15.

c) 3/14.

d) 2/17.

e) 7/32.

3.(FGV/TRT MA/2022) Michael coleciona moedas brasileiras, americanas e francesas. Para cada 3 moedas americanas Michael tem 7 moedas brasileiras e para cada 5 moedas brasileiras, ele tem 2 francesas.

Com relação às moedas de Michael, a razão entre a quantidade de moedas brasileiras e a quantidade de moedas não brasileiras é igual a

a) 7/5.

b) 12/7.

c) 25/19.

d) 30/23.

e) 35/29.

4.(FGV/SEAD-AP/2022) Em uma urna há apenas bolas azuis, brancas e verdes. Para cada 2 bolas azuis há 5 bolas brancas. Para cada 3 bolas verdes há uma bola azul.

A razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas nessa urna é igual a

a) 3/8.

b) 4/9.

c) 5/13.

d) 6/11.

e) 7/15.

5.(FGV/SEJUSP-MG/2022) Em um grupo de 120 pessoas, 50 são adultos (de 21 a 60 anos) e para cada 2 jovens (até 20 anos) há 5 idosos (acima de 60 anos).

Nesse grupo, o número total de vacinados contra a COVID-19 é o triplo do número de não vacinados. Além disso, metade dos vacinados são idosos e 1/3 dos vacinados são adultos.

É correto concluir que nesse grupo de pessoas há

a) 20 adultos não vacinados.

b) 20 jovens vacinados.

c) 50 idosos vacinados.

d) 10 idosos não vacinados.

e) 10 jovens não vacinados.

6. (FGV/CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Cebraspe

7.(CESPE/PM AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue o item subsequente.

Para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B é suficiente acrescentar no tanque A uma quantidade de álcool que é inferior a 25 L.

8.(CESPE/STM/2011) Determinado órgão promoveu concurso público para provimento de vagas de um cargo de nível médio e um de nível superior. As remunerações mensais dos cargos de nível médio e de nível superior eram números diretamente proporcionais a 2 e 3; e a remuneração mensal do cargo de nível médio era R$ 3.000,00 menor que a remuneração do cargo de nível superior.

A respeito dessa situação, julgue o item que se segue.

A soma das remunerações mensais dos 2 cargos é superior a R$ 16.000,00.

FCC

9.(FCC/SEDU ES/2022) Dona Paula pediu aos alunos de sua turma que formassem dois grupos. Ao final, ela percebeu que o grupo A ficou formado por 12 rapazes e 6 moças e o grupo B ficou com 18 moças. Para que a proporção de rapazes fique a mesma nos dois grupos e apenas retirando rapazes do grupo A e os colocando no grupo B, o número de rapazes que devem ir para o grupo B é:

a) 8.

b) 5.

c) 6.

d) 3.

e) 9.

10. (FCC/CBM AP/2022) Considere a seguinte recomendação sobre a aquisição de veículos de suporte básico (B) e avançado (A):

As ambulâncias de suporte básico à vida devem ser adquiridas na proporção de um veículo para cada grupo de 100 a 150 mil habitantes, e as de suporte avançado à vida de um veículo para cada grupo de 400 a 450 mil habitantes.

De acordo com essa recomendação, os atuais veículos de suporte básico de uma cidade seriam suficientes para, no máximo, 750 mil habitantes, e os de suporte avançado para, no máximo, 450 mil habitantes. Se a cidade possui atualmente 1 milhão de habitantes, as quantidades mínimas de veículos

de suporte básico (B) e de veículos de suporte avançado (A) a serem adquiridas para a cidade se adequar à recomendação são:

a) A = 1 e B = 2

b) A = 1 e B = 3

c) A = 1 e B = 4

d) A = 2 e B = 2

e) A = 2 e B = 3

11. (FCC/TRT 19/2022) Pedro e Marco resolveram juntos uma prova com 30 questões. Para cada 2 questões que Pedro resolveu, Marco resolveu 3. A diferença entre o número de questões resolvidas por Marco e o número de questões resolvidas por Pedro foi de

a) 6

b) 8

c) 12

d) 10

e) 9

12.(FCC/ALAP/2020) Para fazer um refresco de maracujá utiliza-se uma parte de suco de maracujá concentrado e três partes de água. Assim, a fim de obter 20 L de refresco de maracujá, além do suco concentrado, o número necessário de garrafas de 1,5 L de água é

a) 7

b) 9

c) 8

d) 10

e) 6

Vunesp

13.(VUNESP/Pref Olímpia/2019) Em um determinado posto de atendimento ao público, há 2 filas de espera, uma para atendimento preferencial e outra para atendimento não preferencial. Na fila para atendimento não preferencial, há 45 pessoas. Sabendo que a razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial e o número de pessoas na fila para atendimento não preferencial é $\frac{2}{5}$, então o número de pessoas na fila para atendimento preferencial é

a) 16.

b) 18.

c) 20.

d) 22.

e) 24.

14.(VUNESP/CODEN/2021) Em certa empresa, os funcionários têm, pelo menos, o ensino médio completo e sabe-se que, para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo. Se nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários, então a diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a

a) 80.

b) 88.

c) 96.

d) 104.

e) 112.

15. (VUNESP/FITO/2020) Em um grupo de amigos, o número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Sabendo-se que a razão entre os números de não casados e casados é $\frac{3}{4}$, o número de pessoas nesse grupo é igual a

a) 14.

b) 21.

c) 28.

d) 35.

e) 42.

16. (VUNESP/FITO/2020) Sobre os 1 430 candidatos que prestaram a última fase de um concurso, sabe-se que a razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é $\frac{4}{7}$. O número de candidatos aprovados nessa fase do concurso é

a) 520.

b) 530.

c) 540.

d) 550.

e) 560.

Outras Bancas

17.(CESGRANRIO/BB/2012) Numa pesquisa sobre acesso à internet, três em cada quatro homens e duas em cada três mulheres responderam que acessam a rede diariamente. A razão entre o número de mulheres e de homens participantes dessa pesquisa é, nessa ordem, igual a $\frac{1}{2}$.

Que fração do total de entrevistados corresponde àqueles que responderam que acessam a rede todos os dias?

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{17}{24}$

e) $\frac{25}{36}$

18.(CESGRANRIO/BR/2015) Uma empresa substituiu seus monitores antigos no formato fullscreen, cuja proporção entre a largura e a altura da tela é de 4:3, por monitores novos no formato widescreen, com proporção entre largura e altura dada por 16:9. Os monitores novos e antigos têm a mesma altura.

A razão entre a largura do modelo novo e a largura do modelo antigo é dada por

a) 1:4

b) 3:4

c) 4:3

d) 4:9

e) 9:4

Gabarito – Multibancas

Razão e proporção

1. LETRA A
2. LETRA E
3. LETRA E
4. LETRA C
5. LETRA A
6. LETRA D
7. CERTO
8. ERRADO
9. LETRA E
10. LETRA D
11. LETRA A
12. LETRA D
13. LETRA B
14. LETRA C
15. LETRA B
16. LETRA A
17. LETRA C
18. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Proporcionalidade

FGV

1.(FGV/SEFAZ-MG/2023) Uma grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B que, por sua vez, é inversamente proporcional ao quadrado da grandeza C.

Quando A = 12, tem-se B = 4 e C = 6.

Quando C = 4, o valor de A é

a) 144.

b) 72.

c) 27.

d) 18.

e) 12.

2.(FGV/CM Taubaté/2022) Sobre 3 grandezas X, Y e Z sabe-se que X é diretamente proporcional a Y e que Z é inversamente proporcional a X.

Quando Y = 3, tem-se X = 6 e Z = 1/2.

Quando X = 3, o valor de Y + Z é

a) 5/2.

b) 3/2.

c) 4.

d) 4/3.

e) 7/3.

3.(FGV/TRT-PB/2022) Uma distribuidora de produtos químicos recebeu 1600 litros de certo composto e deve distribuir toda essa quantidade entre 5 laboratórios em partes proporcionais aos números 3, 4, 5, 6 e 7.

O laboratório que receber a menor quantidade receberá

a) 190 litros.

b) 192 litros.

c) 194 litros.

d) 196 litros.

e) 198 litros.

4.(FGV/TRT MA/2022) Uma empresa de engenharia está realizando as obras X, Y e Z. Foram comprados 360 sacos de cimento que deverão ser repartidos entre as obras X, Y e Z em partes proporcionais aos números 4, 7 e 9, respectivamente.

O número de sacos de cimento que a obra Y receberá é

a) 108.

b) 112.

c) 120.

d) 126.

e) 144.

5.(FGV/TRT MA/2022) Um terreno de 1280 m² foi dividido em 3 partes, proporcionais aos números: 2, 5/2 e 7/2.

A área da maior parte, em m², é

a) 400.

b) 440.

c) 480.

d) 520.

e) 560.

6. (FGV/BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Cebraspe

7.(CESPE/IBAMA/2012) Um órgão de controle, ao aplicar sanções contra empresas petroleiras cujas atividades resultem em agressão ao meio ambiente, determina o valor da multa, em reais, de modo proporcional ao volume de petróleo derramado, em barris, ao tempo de duração do derramamento, em semanas, e à área da região afetada, em quilômetros quadrados. Assim, se determinada empresa petroleira deixar vazar, por três semanas, quatro mil barris de petróleo bruto, causando a contaminação de 950 km2 de superfície marítima, será, em decorrência disso, multada em R$ 5.000.000,00. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Caso, depois de estancado um vazamento, o petróleo derramado avance por uma área correspondente a 10% da área inicialmente afetada, o valor da multa recebida pela empresa aumentará 10% em relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque.

8.(CESPE/CAGE RS/2018) João, Pedro e Tiago, três investidores amadores, animados com a popularização das criptomoedas, investiram 12, 14 e 24 mil reais, respectivamente, em moeda virtual. Após uma semana do investimento, eles perceberam que o prejuízo acumulado, que era de 8 mil reais, deveria ser dividido entre os três, em proporção direta aos valores investidos.

Nessa situação, em caso de desistência do investimento após a constatação do prejuízo, João, Pedro e Tiago receberão, respectivamente, as quantias, em reais, de

a) 9.340, 11.340 e 21.340.

b) 10.080, 11.760 e 20.160.

c) 11.920, 13.240 e 22.840.

d) 2.660, 2.660 e 2.660.

e) 1.920, 2.240 e 3.840.

9.(CESPE/IFF/2018) A quantia de R$ 360.000 deverá ser repassada às escolas A, B e C para complemento da merenda escolar. A distribuição será em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola. Sabe-se que a escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B e que a escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B. Nesse caso, a escola A deverá receber

a) R$ 140.000.

b) R$ 144.000.

c) R$ 168.000.

d) R$ 192.000.

e) R$ 216.000.

10.(CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um empresário dividiu, entre três de seus empregados, a quantia de R$ 6.600,00 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

Nesse caso, todos os valores nessa partilha são maiores que R$ 1.100,00.

11.(CESPE/FUB/2018) A respeito de razões, proporções e inequações, julgue o item seguinte.

Situação hipotética: Vanda, Sandra e Maura receberam R$ 7.900 do gerente do departamento onde trabalham, para ser divido entre elas, de forma inversamente proporcional a 1/6, 2/9 e 3/8, respectivamente.

Assertiva: Nessa situação, Sandra deverá receber menos de R$ 2.500.

FCC

12.(FCC/TRT 22/2022) Alberto tem 25 anos, Breno 40 anos e Carlos 35 anos. Os três trabalham como garçons em um restaurante e decidiram dividir entre eles o valor total das gorjetas. Alberto, que trabalha no restaurante há apenas 5 meses, propôs dividir o total das gorjetas proporcionalmente à idade de cada um, mas Carlos, que trabalha há 1 ano e 3 meses, discorda e propõe que a divisão seja proporcional ao tempo de serviço de cada um no restaurante. Breno, com 1 ano e 8 meses no restaurante foi convidado a desempatar e decidiu que o valor total fosse dividido proporcionalmente ao tempo de serviço. Com um valor total de gorjetas de R$ 1.200,00 e considerando as duas propostas, Alberto deixou de ganhar, em reais,

a) 100,00.

b) 250,00.

c) 30,00.

d) 150,00.

e) 300,00.

13. (FCC/TRT 23/2022) Em um processo de partilha de herança entre Ana, Beatriz e Clara, ficou decidido que os valores recebidos serão diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Sabe-se que Ana tem o triplo da idade de Clara que, por sua vez, tem a metade da idade de Beatriz. Clara receberá 100 mil reais.

O valor total da herança é de:

a) R$ 700.000,00

b) R$ 400.000,00

c) R$ 600.000,00

d) R$ 900.000,00

e) R$ 500.000,00

14.(FCC/Pref. Recife/2019) Sabe-se que as sequências S_1 e S_2 abaixo são diretamente proporcionais $(x > 0)$, isto é, a razão entre os elementos correspondentes das duas sequências é constante:

Sequência S_1: $\{4, x, 16, \dots\}$

Sequência S_2: $\{x, 9, y, \dots\}$

O valor de y é igual a

a) 15.

b) 9.

c) 12.

d) 6.

e) 24.

15.(FCC/TRF 3/2016) Uma herança de R$ 82.000,00 será repartida de modo inversamente proporcional às idades, em anos completos, dos três herdeiros. As idades dos herdeiros são: 2, 3 e x anos. Sabe-se que os números que correspondem às idades dos herdeiros são números primos entre si (o maior divisor comum dos três números é o número 1) e que foi R$ 42.000,00 a parte da herança que o herdeiro com 2 anos recebeu. A partir dessas informações o valor de x é igual a

a) 7.

b) 5.

c) 11.

d) 1.

e) 13.

16.(FCC/CL DF/2018) Miguel, Otávio e Pedro foram convocados para realizar um trabalho emergencial. Para recompensá-los posteriormente, decide-se dividir uma quantia em reais entre os 3 em partes diretamente proporcionais ao tempo dedicado de cada um para realizar o trabalho e inversamente proporcionais às respectivas idades. Sabe-se que Miguel dedicou 4 horas para o trabalho e sua idade é

igual a 30 anos, Otávio dedicou 8 horas e sua idade é igual a 40 anos e Pedro dedicou 15 horas e sua idade é igual a 60 anos. Se a menor parte correspondente a esta divisão foi de R$ 4.800,00, então a maior parte foi igual a

a) R$ 9.000,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 12.000,00.

d) R$ 8.400,00.

e) R$ 7.200,00.

Vunesp

17.(VUNESP/SEMAE Piracicaba/2019) Três amigos fizeram uma aposta em conjunto em certa loteria. As respectivas participações no valor total da aposta foram diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 6. Se o valor total da aposta foi R$ 330,00, então o amigo que teve a menor participação nesse valor contribuiu com

a) R$ 80,00.

b) R$ 70,00.

c) R$ 60,00.

d) R$ 50,00.

e) R$ 40,00.

18.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três amigos dividiram 920 figurinhas em partes inversamente proporcionais às suas idades. Um amigo recebeu 360 figurinhas e outro 240. Se o mais velho desses amigos tem 12 anos, a soma das idades desses três amigos, em anos, é

a) 25.

b) 23.

c) 29.

d) 27.

e) 31.

19.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três máquinas X, Y e Z produziram 2 640 peças de certo jogo, cada peça produzida sempre em um mesmo tempo. A máquina X produziu 820 peças, tendo funcionado por 1 hora e 30 minutos a menos do que a máquina Y. A máquina Z funcionou por 6 horas e 50 minutos e produziu um total de peças igual a

a) 800.

b) 820.

c) 840.

d) 860.

e) 880.

20.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Duas determinadas grandezas x e y podem assumir valores estritamente positivos. A relação de interdependência entre elas pode ser expressa pela sentença $y = \frac{1}{3}x$

Nesse caso, é correto afirmar que

a) y não é direta nem inversamente proporcional a x.

b) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.

c) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 1/3.

d) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.

e) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 1/3.

Outras Bancas

21.(CESGRANRIO/BB/2015) Aldo, Baldo e Caldo resolvem fazer um bolão para um concurso da Mega-Sena. Aldo contribui com 12 bilhetes, Baldo, com 15 bilhetes e Caldo, com 9 bilhetes. Eles combinaram que, se um dos bilhetes do bolão fosse sorteado, o prêmio seria dividido entre os três proporcionalmente à quantidade de bilhetes com que cada um contribuiu. Caldo também fez uma aposta fora do bolão e, na data do sorteio, houve 2 bilhetes ganhadores, sendo um deles o da aposta individual de Caldo, e o outro, um dos bilhetes do bolão.

Qual a razão entre a quantia total que Caldo recebeu e a quantia que Baldo recebeu?

a) 0,8

b) 1,5

c) 2

d) 2,5

e) 3

22.(CESGRANRIO/BASA/2015) Em uma empresa, o total de descontos que incidem sobre o salário bruto de cada funcionário é proporcional ao valor desse mesmo salário bruto. Um funcionário F_1 tem salário líquido igual a S_1, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_1 reais. Um funcionário F_2 tem salário líquido igual a S_2, calculado após a incidência do total de descontos igual a x_2 reais.

O total de descontos x_2 é tal que

a) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \cdot x_1$.

b) $x_2 = \frac{S_2+x_2}{S_1+x_1} \, . (x_1 + x_2)$.

c) $x_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot x_1$.

d) $x_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot x_1$.

e) $x_2 = \frac{S_1+x_1}{S_2+x_2} \, . (x_1 + x_2)$.

GABARITO – MULTIBANCAS

Proporcionalidade

1. LETRA C
2. LETRA A
3. LETRA B
4. LETRA D
5. LETRA E
6. LETRA E
7. CERTO
8. LETRA B
9. LETRA B
10. ERRADO
11. ERRADO
12. LETRA D
13. LETRA C
14. LETRA E
15. LETRA A
16. LETRA A
17. LETRA C
18. LETRA C
19. LETRA B
20. LETRA E
21. LETRA E
22. LETRA D

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.